R&C
Dynamics

ПРИРОДА И КУЛЬТУРА

КНИГА СЕДЬМАЯ

КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

МАТЕРИЯ И ДВИЖЕНИЕ

С ПРИМЕЧАНИЯМИ И ДОПОЛНЕНИЯМИ

ДЖОЗЕФА ЛАРМОРА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Проф. **Н. Н. АНДРЕЕВА**

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА

Джеймс Клерк Максвелл

МАТЕРИЯ И ДВИЖЕНИЕ

С примечаниями и дополнениями
Джозефа Лармора

Перевод с английского
под редакцией
Н. Н. Андреева

R&C Dynamics
РХД
Москва • Ижевск

2001

УДК 530

Максвелл Дж. К.
Материя и движение. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 178 стр.

В этой небольшой книге основатель теории электромагнетизма крупнейший английский физик Джеймс Клерк Максвелл обсуждает основные физические понятия и принципы, в общедоступной форме знакомит читателей с различными вопросами теории, примерами и физическими экспериментами. Будет полезна широкому кругу читателей: от школьников до специалистов и историков науки.

ISBN 5-93972-073-0

http://rcd.ru

Оглавление

Предисловие к последнему английскому изданию (1920 г.)

В этом новом издании классического трактата Джеймса Клерка Максвелла о началах динамики изменения строго ограничены типографскими и немногими стилистическими улучшениями. После некоторых попыток пришлось прийти к заключению, что всякие дополнения текста изменили бы аромат этого произведения, и оно потеряло бы характерные черты его автора. Поэтому были введены лишь краткие подстрочные примечания, в отличие от которых немногие первоначальные примечания автора отмечены арабскими цифрами вместо звездочек. Предметный указатель был составлен заново.

Нельзя рассчитывать, и, без сомнения, не к этому стремился автор, чтобы общее сочинение, подобное настоящему, вошло в употребление в качестве учебного руководства: для этой цели нужно было бы уделить много внимания методам систематического расчета. Однако, как обоснованная схема ньютоновой динамики, постепенно обобщаемая от простых частиц материи к физическим системам, недоступным детальному анализу, написанная одним из учителей науки, со множеством интересных точек зрения, книжка эта должна сохранить свое влияние, несмотря даже на то, что некоторые части изложения векторного исчисления могут в настоящее время показаться несколько абстрактными. Будем надеяться, что немногие критические примечания и ссылки на приложения будут содействовать расширению этого влияния.

Изложение основных начал динамики было, однако, расширено в направлении собственного пути автора включением главы «Об уравнениях движения связанной системы» из второго тома «Электричества и магнетизма». За разрешение воспользоваться этой главой издатели выражают свою благодарность Кларендонской типографии Оксфордского университета.

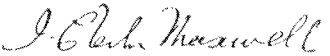
Из тех же соображений были сделаны два добавления. Одно из них излагает принцип относительности движения, получивший недавно огромное значение во многих областях физики, путем, весьма от-

личным от пути автора. Другое стремится развить дальнейшие положения принципа наименьшего действия, который окончательно утвердился как необходимое связующее начало между различными областями теоретической физики.

Конечно, эти приложения труднее для чтения, чем остальные части книги, но они будут служить для нее дополнением, представляя аналитическую сторону динамики, опираясь на которую она и стремится стать точным фундаментом для всей натуральной философии.

Редактор считает долгом выразить свою признательность Кембриджской университетской типографии, и в особенности Дж. В. Пису (J. B. Peace) за помощь и внимание в издании книги.

Дж. Лармор



Биографическая справка

Джеймс Клерк Максвелл родился в Эдинбурге в 1831 году и был единственным сыном *Джона Клерка Максвелла* из Гленлэра, близ Дальбетти, — фамильного имения на юго-западе Шотландии, которое сын и унаследовал. После раннего обучения дома и в Эдинбургском университете он в 1850 году перешел в Кембридж, сначала в Петерхоуз (Peterhouse), а затем в Тринити Колледж. На математическом экзамене на почетные награды 1854 года первую награду получил *Раус* (E. J. Routh), впоследствии преподаватель математики и превосходный исследователь, а *Максвелл* был вторым; вскоре за тем они были признаны равными на конкурсе на Смитовскую премию.

Максвелл был профессором натуральной философии в Эбердине от 1856 до 1860 года и в Лондоне, в King's College, от 1860 до 1865 года, а затем удалился в Гленлэр на шесть лет, в продолжение которых в его уме созрели, без сомнения, плодотворные идеи и вылились в более систематические формы. В 1871 году его убедили возвратиться на жительство в Кембридж и взять на себя дело организации новой Кэвендишской лаборатории. Но через некоторое время его здоровье испортилось, и он умер в 1879 году в возрасте 48 лет.

Научная слава *Максвелла* в течение его жизни поддерживалась главным образом британскими теоретиками физики, в особенности Кембриджской школой. Но с тех пор, как *Гельмгольц* предпринял в 1870 году изучение его теории электрического действия и света и подвергнул ее обсуждению в многочисленных серьезных работах, внимание, уделявшееся заграницей его произведениям, постоянно возрастало до тех пор, пока он не стал, как и в Англии, признанным авторитетом в области физики.

В настоящее время, по всеобщему признанию, идеи *Максвелла*, как математического интерпретатора и продолжателя *Фарадея*, считаются величайшим достижением в нашем познании законов физического мира, достигнутым со времени *Ньютона*. Как и у *Фарадея*, его глубокие исследования природы сочетались с глубоким религиозным благоговением к ней. См. *L. Campbell* and *W. Garnett* «The life of *J. C. Maxwell*» (Macmillian, 1882). «*Treatise on Electricity and Magnetism*» и «*Theory of Heat*» составляют важнейшую часть его трудов. Его «*Scientific Papers*» были изданы Кембриджской университетской типографией в двух больших томах. Много важных писем *Максвелла* содержатся в «Memoir and Scientific Correspondence of Sir *George Stokes*», Cambridge, 1904.

Приложенный к книге характерный портрет воспроизведен, быть может, в первый раз, с фотографической карточки визитного формата, снятой, вероятно, во время лондонского периода.

Дж. Лармор

Предисловие (1877 г.)

Физические науки, которые вплоть до конца восемнадцатого столетия занимались исключительно разработкой концепции явлений природы, как результата сил, действующих между телами, ныне успешно вступили в следующую фазу развития, — в которой энергия материальной системы рассматривается как величина, определяемая конфигурацией и движением этой системы, и в которой понятия конфигурации, движения и силы обобщены до крайнего предела, допускаемого их физическими определениями.

Ознакомиться с этими основными понятиями, исследовать их со всех сторон и приучиться вести течение мысли по руслу строгих динамических рассуждений должно быть основной задачей всякого, изучающего физические науки.

Нижеследующее изложение основ учения о материи и движении нужно поэтому рассматривать как введение в изучение физических наук вообще.

Автор

У. Нивен
Жизнь и научная деятельность Дж. К. Максвелла[1]

Биография Клерка Максвелла была написана профессорами Л. Кемпбеллом (Lewis Campbell) и У. Гарнеттом (Wm. Garnett) с таким мастерством и любовью, что вряд ли к ней можно что-нибудь добавить. Поэтому составление нового подробного жизнеописания выглядело бы самонадеянной попыткой. Но в то же время мемориальное издание сочинений Максвелла не может обойтись без хотя бы беглого очерка его жизни и трудов. Здесь мы вкратце расскажем главные события жизненного пути Клерка Максвелла, отсылая читателя, желающего узнать подробности или постичь социальные корни его характера, к упомянутой книге Кемпбелла и Гарнетта.

Джеймс Клерк Максвелл происходил от Клерков (Clerks) из Пениквика (Penicuick) в графстве Мидлотиан (Midlothian), хорошо известного шотландского рода, история которого прослеживается до 16-го столетия. Первый баронет заседал в шотландском парламенте. Его старший сын, человек образованный, был Бароном Казначейства Шотландии. В более поздние времена Джон Клерк Элдинский (John Clerk of Eldin), принадлежавший к тому же роду, считался изобретателем нового способа пролома вражеской линии кораблей в морском бою, того самого маневра, с помощью которого лорд Родни (Rodney) одержал победу над французами в сражении 1792 года. Следующий Джон Клерк, сын морского тактика, был хитроумным законником и стал впоследствии Лордом Сессионного Суда. Он был знаменит в Эдинбурге своим живым и саркастическим остроумием.

Отцом героя нашего очерка был Джон, брат сэра Джорджа Клерка из Пениквика (Sir George Clerk of Penicuick). Фамилию Максвелл (Maxwell) он принял, получив в наследство имение в Киркадбрайтшире (Kirkcudbrightshire), вошедшее в род Клерков через брак с мисс Максвелл. Нельзя сказать, что он обладал энергией и деятельным умом, ведущими к успеху и отличиям. Скорее он был беспечным, но проницательным и умным человеком, отличительными характеристиками

[1] В переводе М. Л. Левина.

которого были полная искренность и предельная благожелательность. Просвещенный интерес к механическим устройствам и научным занятиям сочетались в нем с практическим складом ума. По окончании университета он посвятил себя юриспруденции и вступил в шотландскую коллегию адвокатов. Но, по-видимому, не достиг большого успеха на этом поприще. Во всяком случае, спокойная жизнь в деревне была настолько привлекательна и для его жены, и для него самого, что он с легкостью распростился с адвокатской карьерой. Жена его Френсез, дочь Роберта Кея (Robert Cay) из Северного Чарльтона в Нортумберленде (Northumberland), отличалась здравым смыслом и решительным характером.

Деревенский дом, где они поселились, оставив Эдинбург (Edinburgh), был построен в имении Джона Клерка Максвелла по его собственному проекту. Дом этот, получивший имя Гленлейр (Glenlair), был окружен красивой местностью, главным очарованием которой были воды реки Урр (Urr) с ее скалистыми и лесными берегами.

Джеймс родился 13 июня 1831 года в Эдинбурге, но большая часть его детства прошла в Гленлейре. Здесь в прелестной и здоровой обстановке малыш стал выносливым и смелым мальчиком. Хотя не слишком охочий до книг, он выказывал задатки будущей духовной силы, проявлявшиеся в стремлении постичь причины и связи окружающих явлений. Впоследствии, когда он уже прославился, стали вспоминать, что вопросы, задаваемые ребенком, отличались глубокомысленностью, необычной для его возраста.

Десяти лет от роду Джеймс, уже потерявший мать, был отвезен в Эдинбург, под присмотр родственников, с тем чтобы он мог учиться в Эдинбургской академии. В повествовании профессора Кемпбелла, который был однокашником Максвелла в школе, а потом близким другом и постоянным корреспондентом, дано прекрасное описание его школьных лет. Малыш — отец мужчины, и те, кому повезло знать взрослого Максвелла, легко увидят знакомое в кемпбелловском портрете мальчика, переступившего порог школы: домотканая одежда — скорее удобная, чем модная; деревенские обороты речи и забавно причудливая, однако часто с юмором, манера выражать свои мысли; изумление при первой встрече со школьной рутиной и спартанская выдержка во время бурсацких испытаний, выпадающих на долю новичка. А затем они оценят, насколько верен этот рисунок мальчика, привыкающего к новому окружению и быстро занявшего то место в школе, на которое ему

дает право мощь ума, в то время как его избыточная энергия находит выход в изготовлении механических устройств, в геометрических построениях, в чтении и даже в попытках набить руку в сочинении баллад, в письмах к отцу, щедро изукрашенных гротескными рисунками и росписью полей.

Одно событие, относящееся к школьному времени, следует отметить особо — изобретение механического способа построения некоторых классов овалов. Описание этого способа было напечатано в трудах Эдинбургского Королевского Общества — первая работа в настоящем собрании. Она была доложена Обществу знаменитым профессором Джеймсом Форбсом (James Forbes), который с самого начала проявлял интерес к успехам Максвелла. Профессор Тэт (Tait), другой его однокашник, замечает, что ко времени написания статьи об овалах Максвелл был обучен лишь алгебре и начаткам Евклида.

В 1847 году Максвелл поступил в Эдинбургский университет и проучился там три года. Он посещал лекции Келланда (Kelland) по математике, Форбса по натуральной философии (физике), Грегори (Gregory) по химии, сэра У. Гамильтона (Sir W. Hamilton) по умственной философии (Mental Philosophy), Вилсона (Cristopher North Wilson) по философии нравственности (Moral Philosophy). Лекции сэра У. Гамильтона оставили в нем глубокий отпечаток, стимулировав любовь к размышлениям, к чему у него всегда была склонность. Однако, как и следовало ожидать, львиная доля его привязанности досталась профессору натуральной философии. Отличавший Форбса энтузиазм естественно вдохновлял юных и ревностных последователей, возбуждал чувство личной причастности. А сам профессор испытывал особый интерес к Максвеллу и предоставил ему необычную тогда привилегию работать на своей аппаратуре.

Внимательное чтение статьи Максвелла об упругих твердых телах, относящейся как раз к этому времени, позволяет установить суть его первой экспериментальной работы В этой статье дано описание некоторых экспериментов, имеющих целью проверку выводов его теории применительно к оптике. Толчком к изучению этого вопроса послужил, по-видимому, следующий случай. Вместе со своим дядей Джоном Кеем Максвелл посетил Уильяма Николя (William Nicol), изобретателя поляризационной призмы, носящей его имя, который показал ему цвета неотпущенного стекла в полярископе. Это побудило Максвелла изучить законы поляризованного света и соорудить свой грубый полярис-

коп, в котором поляризатором и анализатором были простые стеклянные отражатели. С помощью этого инструмента он получил цветные полосы от неотпущенного стекла, перенес их акварельными красками на бумагу и послал Николю. Приятно знать, что эти первые юношеские опыты были тепло одобрены Николем: он ободрил и порадовал Максвелла, послав ему в подарок пару своих призм.

Статья, о которой шла речь, называлась: «О равновесии упругих твердых тел». Она была доложена на заседании Эдинбургского Королевского Общества в 1850 году и явилась третьей по счету работой Максвелла, представленной Обществу. Первой — в 1846 году — была уже упомянутая статья об овалах. Вторая, представленная в 1849 году Келландом, называлась «Теория катящихся кривых».

Эти достижения девятнадцатилетнего юноши с очевидностью свидетельствовали и о его редкой оригинальности, и о необычайной энергии в преодолении трудностей. Однако свойственная ему сосредоточенность проявилась и в стремлении к одиночеству. Отсюда и особенность его речи и поведения. Он был застенчив и сдержан с незнакомыми, его высказывания часто казались темными и по смыслу, и по способу выражения из-за неожиданных и отдаленных намеков. Общительный в душе и даже любящий быть на людях, он казался сдержанным и скрытным. Кемпбелл жалеет, что пребывание Максвелла в Кембридже не началось раньше, ибо там ему не удалось бы избежать повседневного общения с людьми. Но тогда он, потеряв возможность работать на аппаратуре профессора Форбса, лишился бы, может быть, самой важной части своего научного воспитания.

Поначалу предполагалось, что Максвелл пойдет по стопам отца-адвоката, но очень скоро стало ясно, что его интересует только наука. Поэтому в конце концов был выбран Кембридж, и в октябре 1850 года Питерхаус (Peterhouse) стал местом пребывания Максвелла. Однако всего лишь на один Михайлов триместр (Michaelmas Term): 14 декабря того же года он перевелся в Тринити-колледж (Trinity College).

Его подготовка к кембриджскому курсу, конечно, сильно отличалась от обычной; в первое время не было жесткого плана учебы, и он постигал науку по своей воле, оставляя себе возможность предаваться и другим занятиям. Он не был охотником — более того, так называемый спорт всегда вызывал у него отвращение, но сельский образ жизни ему очень нравился. Он хорошо ездил верхом и плавал. Кемпбелл рассказывает, с каким жаром он декламировал стихи Бернса о

том, как вдохновение настигает поэта, когда он бесцельно, по воле прихоти бродит вдоль берегов ручья. Из этого рассказа видно, что было самым большим наслаждением для Максвелла. Но он не только любил поэзию. Приводимые Кемпбеллом отрывки его стихов убеждают, что Максвелл сам был поэтом. Однако он ясно понимал, что его истинное призвание — наука, и относился к своим стихотворным опытам, как к простой забаве. Преданность науке, уже поощренная первыми успехами, склонность размышлять над философскими вопросами и привязанность к английской словесности, в первую очередь к английской поэзии, — все это, заложенное в интеллект удивительной мощи и чистоты, и явилось, можно сказать, первичным запасом, с которым Максвелл начал свою кембриджскую карьеру. Кроме того, он был достаточно и разнообразно начитан в науке, о чем свидетельствуют упомянутые выше статьи для Эдинбургского Королевского Общества. Он привез с собой, как заметил профессор Тэт, кучу знаний, просто непомерную для столь молодого человека, но их беспорядочность приводила в ужас его методичного наставника.

В студенческой карьере Максвелла не было ничего особо примечательного. Собственные размышления и поиски ему пришлось отложить в сторону ради систематической учебы. Но ум его неуклонно созревал для будущих трудов. Среди тех, с кем сводило его каждодневно положение студента Тринити-колледжа, были самые яркие и образованные молодые люди университета. В сердечном товариществе стола стипендиатов пришелся ко двору мягкий юмор Максвелла, а в более избранном Клубе Апостолов, созданном для взаимного совершенствования, он нашел место, где его любовь к размышлениям могла проявиться в сочинениях о предметах, лежащих за пределами обычного университетского курса. Работа над этими сочинениями без сомнения заложила основу той литературной законченности стиля, которая столь характерна для всех научных писаний Максвелла. Его биографы собрали выдержки из этих сочинений на разные темы. Они примечательны и глубиной мысли, и иногда встречающимися эпиграммами, полными холодного и саркастического ума.

Все это позволяет нам полагать, что при всей своей застенчивости Максвелл знал себе цену. Тому подтверждение — рассказ покойного мастера Тринити-колледжа доктора Томпсона (Thompson), к которому, как к тогдашнему наставнику, Максвелл обратился с просьбой о переводе в этот колледж. Он выглядел застенчивым и неуверенным в

себе юнцом, но вдруг, к удивлению Томпсона, вытащил связку статей, несомненно тех, о которых мы уже упоминали, и сказал: «Может быть, это убедит Вас, что я гожусь для вашего колледжа».

Он стал учеником прославленного Уильяма Хопкинса (William Hopkins) из Питерхауса, который приучил его к систематическим занятиям. Одна его особенность запомнилась всем современникам Максвелла. Он всегда пытался решить задачу геометрическим методом, если даже аналитический подход, выбираемый другими учениками, был более легким. Эта черта может быть проиллюстрирована множеством примеров из его сочинений, но она была лишь этапом в его методе решения научных задач, позволяющем переходить от одной идеи к другой без опоры на уравнения.

Студенческие публикации Максвелла на математические темы малочисленны и не имели особого значения. Но ему удавалось выкроить время на занятия, выходящие за рамки университетской программы. Он регулярно посещал лекции профессора Стокса (Stokes). На самом деле он был знаком с некоторыми сочинениями Стокса еще до поступления в Кембридж, как это было видно из статьи об упругих твердых телах. Еще до 1850 года Стокс опубликовал замечательные работы по гидромеханике и оптике. Сэр У. Томсон (Sir W. Thompson), который по университетскому счету (by University standing) был старше Максвелла на девять лет, наряду с другими важными исследованиями обратил особое внимание на математическую аналогию между теплопроводностью и электростатикой. Нет никакого сомнения, что эти авторы вместе с Фарадеем, чьи экспериментальные исследования Максвелл тщательно изучал, оказали на него направляющее влияние.

Студенческая жизнь Максвелла кончилась в январе 1854 года. Он был вторым рэнглером, но поделил с Раусом (Routh) (старшим рэнглером этого года[1]) первую награду Смита (First Smith's Prize). Как положено, его выбрали членом Тринити-колледжа, а затем зачислили в штат лектором.

Едва успев освободиться от экзаменационных тягот. Максвелл с головой окунулся в самостоятельную работу. Ему не терпелось занять-

[1] Wrangler — студент, особо отличившийся на экзамене по математике в Кембридже. Использованные в переводе сочетания «старший рэнглер» (senior wrangler) и «второй рэнглер» (second wrangler) следует понимать как первый и второй призеры (лауреаты) на экзамене по математике соответствующего выпуска в Кембридже. — *Прим. ред.*

ся несколькими задачами, и в первую очередь он закончил исследование чисто геометрической задачи о трансформации поверхностей при изгибании. Уже в марте мемуар на эту тему был предоставлен в Кембриджское философское общество. В это же время он занялся количественным измерением смеси цветов и исследованием причин цветовой слепоты. Как уже упоминалось, еще в студенческие годы он нашел время для изучения электричества. Оно принесло плоды, и в результате появился первый из его замечательных мемуаров на эту тему — мемуар о фарадеевских силовых линиях.

И число и важность его статей, опубликованных в 1855–1856 годах, свидетельствуют о его неутомимости в этот период. А к этому надо добавить еще подготовку лекций в колледже, чем он занялся с неменьшим энтузиазмом. Завязались ценимые знакомства, и много научных и литературных интересов привязывали Максвелла к университету. Тем не менее он выдвинул свою кандидатуру на занятие вакантной кафедры естественной философии Маришаль-колледжа (Marischal College) в Абердине (Aberdeen). Этот шаг был, по-видимому, сыновним уважением желаний отца, ибо длинные летние каникулы в шотландском колледже позволяли ему проводить вместе с отцом почти полгода в Гленлейре. Он получил эту кафедру, но, к несчастью, добрые намерения, побудившие его искать это место, оказались напрасными из-за смерти отца в апреле 1856 года.

Сама по себе замена должности лектора в Тринити на профессорство в Абердине вряд ли была разумной. Некоторый выигрыш, конечно, был — обладание лабораторией и длинные, без перерыва, летние каникулы. Но тяготы обучения началам механики и физики в классах, состоящих из неподготовленных юнцов, вряд ли было подходящим делом для Максвелла, в то время как в большом колледже, подобном Тринити, среди студентов не было недостатка в многообещающих молодых математиках, способных оценить его необычайный талант и глубокие знания. И от обучения таких студентов он и сам был бы в выигрыше.

В 1856 году Максвелл приступил к обязанностям профессора естественной философии Маришаль-колледжа, а спустя два года женился на Кэтрин Мери Дьюар (Katharine Mary Dewar), дочери главы колледжа. Поэтому он выбыл из числа членов Тринити-колледжа, хотя впоследствии вместе с профессором Кэли (Cayley) был избран почетным членом.

В 1856–1860 годах Максвелл активно продолжал изучение цветовых ощущений и изобрел новый измерительный прибор — так называемый цветовой ящик. Но большая часть и его усилий, и времени была отдана исследованию устойчивости колец Сатурна. Тема эта была предложена на соискание премии Адамса (Adams Prize Essay) 1857 года в следующей формулировке:

«Задача должна рассматриваться в предположении, что система колец в точности или с очень большим приближением концентрична с Сатурном и симметрично расположена относительно его экваториальной плоскости. Возможны следующие предположения: (1) кольца являются жесткими образованиями, (2) они жидкие или часть из них газообразна, (3) они состоят из неупорядоченных отдельных масс вещества. Задача будет считаться решенной, если для всех трех гипотез удастся дать ответ о выполнении условий механической устойчивости при взаимном притяжении и движении планеты и колец.

Желательно также, чтобы была сделана попытка выяснить, какая из перечисленных гипотез в состоянии объяснить наблюдаемый вид и ярких колец, и недавно открытого темного кольца. Далее, желательно указать причины изменения формы колец, найденного из сравнения нынешних наблюдений с более ранними».

Здесь мы отметим лишь, что Максвелл, выполнив громадный объем теоретических исследований, пришел к выводу: «Кольца могут существовать только как система большого числа несвязанных частиц, вращающихся вокруг планеты с разными скоростями, соответствующими их расстоянию от планеты. Эти частицы могут быть упорядочены в виде ряда узких колец, или же каждая из них может беспорядочно пронизывать толщу остальных. В первом случае разрушение всей системы происходит чрезвычайно медленно. Во втором случае оно гораздо быстрее, но может появиться тенденция к формированию узких колец, и процесс замедляется».

Раздел работы, посвященный осцилляторным волнам, возникающим в кольце спутников, иллюстрировался хитроумным механическим устройством, которое было показано Эдинбургскому Королевскому Обществу и вызвало там восхищение.

Это сочинение не только завоевало премию Адамса, но и принесло его автору славу среди людей науки. Сэр Джордж Эйри (George Airy) считал его одним из самых замечательных приложений математики к физике.

Некоторые полагают, что внешняя правильность и однородность колец Сатурна, состоящих из частиц с неупорядоченными движениями, навели Максвелла на исследования по кинетической теории газов, первое из которых было доложено Британской Ассоциации в 1859 году. Может быть, оно и так, но не следует забывать, что к этому времени старая теория Бернулли (Bernoulli) начала вторую жизнь в работах Герапата (Herapath), Джоуля (Joule) и Клаузиуса (Clausius), и они-то и могли привлечь внимание Максвелла.

В 1860 году произошло объединение Кингс-колледжа и Маришель-колледжа в Абердинский университет. Образованную в нем новую кафедру естественной философии возглавил Дэвид Томсон (David Thomson), ранее профессор Кингс-колледжа, по возрасту старше Максвелла. Конечно, Максвелл превосходил его как физик, но зато профессор Д. Томсон обладал исключительными волевыми качествами и административными способностями: именно ему принадлежала решающая роль в слиянии колледжей. Он был также обожаемым лектором и преподавателем и своей деятельностью значительно способствовал повышению уровня научного образования на севере Шотландии. Таким образом, почти неизбежный выбор попечителей университета мог произвести впечатление педагогического провала Максвелла. Совершенно безосновательное однако — судя по числу добровольных слушателей, посещавших его лекции в последний семестр в колледже, он был популярен и как профессор, и как личность.

Об этом свидетельствует также и последовавшее вскоре его избрание профессором естественной философии и астрономии в лондонском Кингс-колледже (King's College). Новое назначение сблизило Максвелла с товарищами по науке, и в первую очередь с Фарадеем, с чьими исследованиями по электричеству так тесно были связаны его собственные. В 1862–1863 годах он принял активное участие в организованных комитетом Британской Ассоциации опытах по определению электрического сопротивления в абсолютных единицах и в постановке электрических измерений на должном уровне. По общему плану, предложенному сэром Уильямом Томсоном, в лаборатории Кингс-колледжа были выполнены две большие серии экспериментов. В первый год рабочими участниками этих опытов были Максвелл, Бальфур Стюарт (Balfour Stewart) и Флиминг Дженкин (Fleeming Jenkin), на следующий год Бальфура Стюарта сменил Чарльз Хокин (Charles Hockin). Плоды работы комитета были сообщены в форме отчетов Британской Ассоциа-

ции, а впоследствии составили целый том, опубликованный Флимингом Дженкином.

Максвелл был профессором Кингс-колледжа с 1860 по 1865 год, и именно на этот период приходятся самые важные из его работ. Второй мемуар о цветах появился в 1860 году. В том же году были опубликованы его первые статьи по кинетической теории газов. В 1861 году вышли статьи о физических силовых линиях, а в 1864 — величественный мемуар по электричеству — динамическая теория электромагнитного поля. Но динамическая теория газов занимала его и в 1865 году, ибо вскоре были опубликованы две важные статьи: сначала Бекерианская лекция о вязкости газов, а затем мемуар о динамической теории газов.

Умственное напряжение, связанное с такой обширной деятельностью в науке, сопряженной с одновременными обязанностями профессора, которым приходилось уделять 9 месяцев каждого года, явилось, по-видимому, причиной принятого им в 1865 году решения об отказе от кафедры. Максвелл уехал в свое поместье. Вскоре после этого он перенес тяжелую болезнь, а по выздоровлении продолжил работу по динамической теории газов, которую мы уже упоминали. Спокойно и уединенно прошли несколько лет жизни в Гленлейре, лишь раз в год приезжал он в Лондон для участия в собраниях Британской Ассоциации, да еще в 1867 году совершил поездку в Италию. Правда, несколько раз он соглашался быть экзаменатором на математических Трайпосах в Кембридже, и на это уходили две-три зимние недели в университете. Главным же занятием Максвелла все эти годы была подготовка знаменитого ныне трактата об электричестве и магнетизме, который был опубликован лишь в 1873 году. Кроме этого Максвелл написал книгу о теплоте; она вышла в свет в 1871 году.

В 1871 году Максвелл вышел — надо сказать, с неохотой — из своего деревенского отшельничества. Наступил новый этап его жизни. Незадолго до этого Кембриджский университет принял решение создать кафедру физики для развития исследований и обучения в области теплоты, электричества и магнетизма. Поощряя эту цель, канцлер университета герцог Девонширский великодушно дал средства на строительство лаборатории и оборудование ее всеми необходимыми приборами. Максвеллл получил приглашение занять эту новую кафедру и вместе с тем следить за сооружением лаборатории. В октябре 1871 года он прочитал свою вступительную лекцию.

Строительство Кавендишевской лаборатории, названной так в честь ее основателя, нынешнего главы рода, давшего миру великого физика с той же фамилией, было закончено в 1874 году. В июне этого года канцлер официально подарил ее университету. Благодаря усилиям Максвелла и само здание, и оборудование в комнатах были великолепны, однако общее число приборов оказалось меньшим по сравнению с намерениями канцлера. Так получилось из-за того, что профессор заказывал приборы лишь у самых лучших мастеров и при этом еще вносил придуманные им самим усовершенствования. Со временем этот недостаток был в значительной степени устранен, поскольку по мере надобности постоянно добавлялись новые приборы.

Одной из главных целей Максвелла было руководство занятиями молодых бакалавров, ставших его учениками после успешной сдачи университетских экзаменов. Несколько учеников, ныне достигших известности, проводили важные опыты под руководством самого профессора. Надо признать, что сначала число их было невелико, но, возможно, здесь сказывались традиции многих прежних лет. Отношение профессора к этим ученикам отличалось исключительной добротой и стремлением помочь. В долгих собеседованиях он открывал перед ними кладовые своего ума, подсказывал, чем стоило бы заняться и чего следует избегать, и всегда находил хитроумные выходы из экспериментальных трудностей, ставящих их в тупик. Эти собеседования, всегда блестящие и поучительные, являлись сами по себе, как вспоминал один из учеников, щедрой образовательной школой. И слушатели платили ему благодарной привязанностью, редко выпадавшей на долю других учителей.

Кроме руководства собственной кафедрой. Максвелл принимал активное участие в делах университета, и в частности отлаживал лекционные курсы по математике и физике.

В течение ряда лет, предшествующих возвращению Максвелла в 1866 году в Кембридж в качестве экзаменатора на математических Трайпосах, занятия в университете постепенно утрачивали связь с великими научными событиями, происходившими снаружи его стен. Поговаривали, что бывшие тогда в ходу темы не представляют интереса для молодого поколения. Поднялся ропот, что из-за отсутствия таких важных разделов, как «Теплота», «Электричество» и «Магнетизм» в экзаменационных задачах Трайпоса кандидаты тратили время и усилия на математические безделушки, лишенные научного интереса и

практической ценности. Максвелл с жаром включился в перестройку. Его задачи, предложенные в 1866 году и в последующие годы, вдохнули новую жизнь в экзамены, он принял самое активное участие в разработке нового учебного плана в 1873 году, но, конечно, наибольшее влияние он оказал на молодых членов университета своими сочинениями, и сыграл в значительной степени определяющую роль во введении осуществленных перемен.

Первые два года в Кембридже Максвелл был занят и окончательной отделкой своего великого труда об электричестве и магнетизме. После хлопот с печатанием он вышел в свет в 1873 году, и немногие опубликованные за эти два года статьи Максвелла касаются в основном вопросов, составляющих содержание трактата. Так что действительно ему уделялось почти все внимание Максвелла в этот период. После опубликования трактата число статей Максвелла в научных журналах заметно увеличилось, наиболее важные из них относились к динамической теории газов. Кроме этого, он написал множество заметок и обзоров для журнала Нейчур и для Британской энциклопедии. Тут и прелестные изложения научных вопросов и критические разборы работ современных авторов и, наконец, краткие уважительные биографии товарищей по науке.

Очень много времени и труда потратил он, правда с большой охотой, на редактирование «Электрических исследований» достопочтенного Генри Кавендиша (Hon. Henry Cavendish). Этот труд, опубликованный в 1879 году, значительно увеличил репутацию Кавендиша, открыв многие достижения, о которых и не подозревали, этого проницательного физика в теории электричества, особенно в измерении электрических величин. Издание это обогащено рядом ценных примечаний, в которых воззрения и результаты Кавендиша разобраны с позиций современных теорий и методов. Особенно ценны методы нахождения электрических емкостей проводников и конденсаторов — предмет, в котором проявилось искусство Кавендиша и как математика, и как экспериментатора.

Значение взятого Максвеллом на себя труда по обработке бумаг Кавендиша можно понять из следующего отрывка предисловия к их изданию.

«Трудно объяснить тот факт, что, хотя Кавендиш составил полное описание своих опытов с заряженными телами и даже не поленился переписать его набело, хотя все это было сделано до 1774 года, опыты

по электричеству продолжились до 1781 года, а прожил он до 1810 года — рукопись так и не была опубликована.

Кавендиша интересовало само исследование, а не публикация. Он пускался в напряженные поиски для прояснения трудности, которую никто кроме него самого не мог углядеть, и нет никакого сомнения, что исход этих поисков приносил ему в случае успеха некое удовлетворение. Но оно не пробуждало в нем желания сообщить об открытии другим, желания, которое для обыкновенных людей науки является причиной публикации их результатов. Писанная история электричества показывает, что исследования Кавендиша остались полностью неизвестными для людей науки.»

Вероятно, любому человеку ясно, насколько трудно поставить себя на место физика, жившего столетием раньше, и прочувствовать подлинную суть его опытов. А Максвелл сделал это с таким воодушевлением, что как бы изнутри полностью овладел кавендишевскими подходами. И доказал, что Кавендиш предвосхитил многие открытия в науке об электричестве, сделанные много лет спустя. Именно ему принадлежат введение понятий и измерение электрической емкости и диэлектрической проницаемости, он же предвидел и закон Ома (Ohm).

Едва кончив дело с рукописями Кавендиша, Максвелл принялся за подготовку нового издания своего трактата об электричестве и магнетизме. Но, к несчастью, летом 1879 года здоровье его резко ухудшилось. Надеялись, что живительный воздух деревенского дома сможет восстановить его силы. Но летние месяцы не принесли улучшения, и он постепенно стал падать духом. Старший товарищ по университету профессор Сэндерс (Sanders) сказал, наконец, что ему осталось жить лишь несколько недель.

Еще надеясь на что-то, Максвелла перевезли в октябре обратно в Кембридж, где его пользовал любимый им врач доктор Паже (Paget). Но ничего не помогало, и после мучительных страданий Максвелл умер пятого ноября 1879 года на 49-м году жизни.

Максвелл был скошен смертью в самом расцвете своих творческих сил — как раз в то время, когда область науки, развитию которой он столь многим способствовал, каждый день обогащалась свежими открытиями. Его смерть оплакивалась, как невосполнимая потеря для науки и для университета, ценившего его расположение и восхищавшегося его гениальностью.

Мы не будем обсуждать здесь в подробностях историческую связь деятельности Максвелла и его предшественников, равно как и его воздействие на научную мысль наших дней. В ряде его статей содержатся обширные ссылки на труды тех, чье влияние он испытал, а в самых его поздних статьях, особенно в популярных, написанных для Британской энциклопедии, он дал полное историческое описание главнейших разделов науки, в которых он трудился. И не наступило еще, как нам кажется, то время, когда можно должным образом оценить все возрастающее влияние идей Максвелла на современную научную мысль. Поэтому мы ограничимся здесь лишь напоминающим перечнем самых главных достижений Максвелла.

Его сочинения расположены, насколько это возможно, в хронологическом порядке. Но естественно разбить их по нескольким заголовкам, и мы вряд ли ошибемся, если поставим на первое место труды по электричеству.

Первая статья Максвелла на эту тему носила название «О фарадеевских силовых линиях» и была доложена Кембриджскому философскому обществу 11 декабря 1855 года. Его давно привлекал подход Фарадея к описанию законов электричества, и здесь он поставил перед собой задачу показать, что идеи, руководившие Фарадеем в его исследованиях, не противоречат формулам, в которых Пуассон и другие выразили эти законы. Целью работы было найти физическую аналогию, которая позволила бы уяснить результаты предшественников, «не отдавая себя в плен какой-либо теории, доставившей нам исходные физические понятия. Тогда погоня за аналитическими тонкостями не уведет нас в сторону от сути дела, а выбор гипотезы не приведет к уклонению от истины.»

Далее электрические законы сравниваются со свойствами несжимаемой жидкости, движение которой замедляется силой, пропорциональной скорости, причем сама жидкость не обладает инерцией. Максвелл указывает аналогию между линиями тока такой жидкости и силовыми линиями и получает таким образом не только законы статического электричества в однородной среде, но и способ описания перехода действия из одного диэлектрика в другой.

В заключительной части статьи он переходит к разбору явлений электромагнетизма и показывает, что законы, открытые Ампером и Фарадеем, приводят к одинаковым выводам. В этой же работе он дает три выражения, описывающие компоненты фарадеевского электрото-

нического состояния, признавая, однако, что пока еще не может сформулировать физическую теорию, приводящую к ясной картине связей, выражаемых этими уравнениями.

Важность этой работы прежде всего в том, что она высвечивает те принципы, которыми руководствовался Максвелл с самого начала своих исследований по электричеству. Идея электротонического состояния прочно овладела его умом еще до того, как он смог дать ей физическое объяснение. В статье «О физических линиях силы», напечатанной в 21-м томе Философского журнала, Максвелл снова возвращается к этому предмету. Он объясняет, что в своей предыдущей статье он нашел геометрическое толкование электротонического состояния, а теперь намерен «рассмотреть магнитные явления с точки зрения механики». Тут же выдвигается замечательное предложение о магнитном поле, занятом молекулярными вихрями, оси которых направлены вдоль силовых линий. Предполагается, что ячейки, внутри которых крутятся эти вихри, разделены слоями частиц, выполняющих двойное назначение. Они передают движение от одной ячейки к другой, а своими собственными движениями создают электрический ток. Эта теория, породившая несколько рабочих моделей, придуманных для объяснения явлений в диэлектрике, замечательна и детальной разработкой и, главное, тем, что она объясняет не только магнитные и электромагнитные действия, но и различные виды электростатического действия. Впоследствии, создав общую теорию электромагнитного поля, Максвелл отнюдь не следовал всем соображениям этой статьи, но нет никакого сомнения, что главные ее мысли, и в первую очередь существование вращения вокруг магнитных силовых линий, принадлежали к числу его постоянных убеждений. В «Трактате об электричестве и магнетизме» (т. II, с. 416, во втором издании с. 427) после ссылки на объяснение магнитного вращения плоскости поляризации света, данное сэром У. Томсоном, идут такие слова об указанной статье:

«Теория молекулярных вихрей, разработанная мною с достаточною обстоятельностью, была опубликована в Философском журнале в выпусках за март, апрель и май 1861 года и за январь и февраль 1862 года.

Я полагаю, что у нас есть свидетельства в пользу мнения о существовании некоего явления вращения, происходящего в магнитном поле, что это явление совершается большим числом очень маленьких частиц вещества, каждая из которых крутится вокруг собственной оси,

что эти оси параллельны направлению магнитной силы и что вращения различных вихрей связаны между собой некоторым механизмом.

Сделанную затем попытку вообразить рабочую модель такого механизма надлежит рассматривать не более как только демонстрацию того, что можно придумать механизм, способный создавать механические связи, эквивалентные истинным связям между частями электромагнитного поля.»

Эта статья важна и тем, что в ней содержится первое упоминание об электромагнитной теории света, которая затем была подробно развита в третьем большом мемуаре Максвелла «О динамической теории электромагнитного поля». Этот мемуар, представленный Королевскому Обществу 27 октября 1864 года, содержит самые зрелые соображения Максвелла о предмете, столь долгое время занимавшем его ум[1]. Впоследствии он вошел в трактат с незначительными переделками, не коснувшимися его главного содержания. В этой статье Максвелл переворачивает сам подход к электрическим явлениям, принятый всеми авторами математического толка, которые начинали с законов, найденных Ампером, и, опираясь на закон сохранения энергии, выводили из них индукцию токов. Максвелл же сперва приходил к законам индукции, а затем выводил механические притяжения и отталкивания.

Напомнив об основных явлениях взаимодействия токов и магнитов, индукции, вызываемой в контуре при любых изменениях пронизывающего его поля, распространении света через светоносную среду, свойствах диэлектриков и других явлениях, указывающих на существование среды, способной передавать силу и движение, Максвелл продолжает:

«Итак, все это ведет нас к представлению о сложном механизме, способном совершать множество разных движений, между которыми существуют такие связи, что движение одной части зависит в силу определенных соотношений от движения других частей, и эти движения сообщаются через силы, возникающие из-за упругости при относительных смещениях связанных между собой частей. Такой механизм должен подчиняться законам динамики.»

[1]Именно эта дата, 27 октября 1864 года, может считаться днем рождения максвелловской электродинамики. Студенты Нижегородского (тогда еще Горьковского) университета очень торжественно отпраздновали столетие этого события. К сожалению, люди редко отдают дань праздникам естественных наук, предпочитая им юбилеи гуманитарных. — *Прим. ред.*

Применяя динамический принцип к такой связанной системе, Максвелл пришел к некоторым общим заключениям, которые после сравнения с законами индуцированных токов позволили ему отождествить некоторые черты этого механизма со свойствами токов. Именно так были объяснены и взаимоувязаны индукция токов и их электромагнитное притяжение.

Опираясь на эти посылки, Максвелл в том же мемуаре устанавливает общие уравнения поля и получает известные формулы для механических сил, действующих на токи, магниты и тела, несущие электрический заряд. Далее он возвращается к электромагнитной теории света, разрабатывая ее с большей полнотой, Из его уравнений следует, что через диэлектрики могут проходить лишь поперечные колебания, скорость распространения которых в воздухе, вычисленная по его электрическим свойствам, практически совпадает со скоростью света. Для других диэлектриков показатель преломления равен квадратному корню из произведения диэлектрической проницаемости на магнитную проницаемость. Впрочем, последний множитель для большинства веществ практически совпадает с единицей. Этот вывод теории подвергался проверке на нескольких сравнениях. Для парафина и некоторых углеводородов теория и эксперимент дают хорошее согласие, однако для стекла и ряда других веществ это не так. Максвелл применяет свою теорию и к средам, не являющимся совершенными изоляторами, и находит выражение для потерь света при прохождении через слой данной толщины. Подтверждение своих результатов он видит в том, что хорошие проводники светонепроницаемы, в то время как изоляторы прозрачны. Но при этом он добавляет, что свободно проводящие ток электролиты часто бывают прозрачными, а сусальное золото, чье сопротивление было определено в опытах Хокина, пропускает слишком большое количество света. И тут он отмечает, что возможно «для электромагнитных сил, меняющих свое направление с такою же быстротой колебаний, как у света, потери энергии меньше, чем в случае, когда они не меняют направление заметное время, как это имеет место в наших опытах». Подобное объяснение может быть дано и расхождению между вычисленными и наблюденными значениями диэлектрических проницаемостей. В 46-м томе Трудов Королевского Общества профессор Дж. Дж. Томсон (J. J. Thomson) описывает свои опыты по нахождению диэлектрической проницаемости ряда диэлектриков для переменных электрических сил, имеющих частоту 25 000 000 колеба-

ний в секунду. Он нашел, что в этих условиях диэлектрическая проницаемость стекла очень близка к величине квадрата показателя преломления и гораздо меньше значения для малых частот изменения поля. Здесь следует сослаться и на наблюдения профессора Герца (Hertz), показавшего, что вулканит и смола прозрачны для волн с периодом колебаний около трехсот миллионных долей секунды. Исследования Герца показали, что электродинамические излучения передаются в форме волн, чья скорость, если и не равна скорости света, то сопоставима с ней; тем самым эти исследования окончательно доказали, что удовлетворительная теория электричества обязана опираться в той или иной форме на процессы в диэлектрике. Как он сам подчеркивает в своем трактате, основной чертой теории является трактовка изменения электрического смещения как части — наряду с током проводимости — полного тока, поток которого подобен несжимаемой жидкости. Именно этот полный ток обусловливает внешние электродинамические действия. В этом отличие теории Максвелла от теории Гельмгольца, также учитывающей влияние диэлектрика. Подробное обсуждение различий между этими двумя теориями дано в написанном профессором Дж. Дж. Томсоном обзоре электрических теорий, к которому мы отсылаем читателя[1]. Здесь же лишь отметим, что в упомянутом мемуаре Максвелл применяет свою теорию к прохождению света через кристаллы и при этом сразу избавляется от волн с продольными колебаниями, бывших камнем преткновения для других теорий света.

Усилиями лорда Рэлея (Lord Rayleigh), г-на Глейзбрука (Glazebrook), профессора Дж. Дж. Томсона и других исследователей электромагнитная теория света была существенно обогащена. И в настоящих трудах содержатся небольшие статьи, относящиеся к науке об электричестве, хотя, конечно, наиболее полный свод работ Максвелла в этом направлении надо искать в его трактате об электричестве и магнетизме, куда были включены все более ранние результаты.

Другой цикл статей, вряд ли менее значительный, чем статьи об электричестве, образуют мемуары по динамической теории газов. Сама идея, что свойства вещества объясняются движениями и столкновениями предельно малых частиц, столь же стара, как времена древней Греции, и в своей статье «Атомы» Максвелл подробно описал все былые споры, порожденные этой идеей. Однако математические трудности

[1] British Association Report, 1885.

были столь велики, что реальный успех наступил лишь тогда, когда этим занялся Клаузиус и вскоре за ним Максвелл. Первая его статья на эту тему называлась «Пояснения к динамической теории газов» и была опубликована в январском и июльском выпусках Философского журнала за 1860 год, будучи в предыдущем году доложена на собрании Британской Ассоциации. Хотя развитые в этой статье методы были впоследствии заменены Максвеллом другими, сама статья весьма интересна тем, что в ней ясно очерчен круг задач, которые Максвелл предполагал решить, так что она в зародыше содержит многое из того, что было рассмотрено в его следующем мемуаре. В этом смысле статья начинает эпоху, поскольку в ней впервые перечислены утверждения, характеризующие достижения Максвелла в этой области. В ней впервые говорится о распределении по скоростям в соответствии с законом ошибок. Предвещена теорема о равенстве средних кинетических энергий молекул двух газов, находящихся в тепловом равновесии, и впервые дана динамическая трактовка вязкости газов.

В большом мемуаре «О динамической теории газов», опубликованном в Философских трудах Королевского Общества и доложенном обществу в мае 1866 года, он возвращается к этому предмету и в первый раз предлагает общие динамические методы, необходимые для его рассмотрения. Казалось бы, Максвелл возделывает ту же почву, что и в предыдущей статье, однако подходы отличаются очень сильно. Он отказывается от прежней гипотезы о молекулах как о твердых упругих шарах и предполагает теперь, что они отталкиваются друг от друга с силой, обратной пятой степени расстояния. Главной причиной выбора такого закона действия является то, что он существенно упрощает расчет столкновений между молекулами и приводит к прямой пропорциональности между коэффициентом вязкости и абсолютной температурой. Максвелл сам провел экспериментальную проверку этого заключения теории и в статье о вязкости газов сообщил об удовлетворительном согласии. Пересчет его вычислений обнаруживает, однако, небрежности, существенно влияющие на полученное значение коэффициента вязкости. Последующие эксперименты также показывают, что простая связь, которую он пытался установить, не столь близка к истине, как он полагал, и поэтому весьма сомнительно, что взаимодействие между двумя молекулами может быть представлено законом простого вида.

В этом же мемуаре дано новое доказательство закона о распределении молекул по скоростям, но оно при всех своих достоинствах опира-

ется на предположение, что в окрестности каждой точки распределение по скоростям одинаково для всех направлений, независимо от воздействий, испытываемых газом. Этот изъян в рассуждении, отмеченный впервые Больцманом (Boltzmann), почувствовал, по-видимому, и сам Максвелл, поскольку впоследствии в статье «О напряжениях в разреженных газах, возникающих из-за неравенства температур», опубликованной в 1-й части Философских трудов за 1879 год, он выбирает функцию распределения иной формы. Целью этой статьи было построение теории явлений, наблюдаемых в радиометре Крукса (Crookes). Результаты исследования изложены во введении к этой статье, и из них следует, что динамическая теория не в состоянии объяснить наблюдаемое движение без предположения о том, что газ, находящийся в контакте с твердым телом, может скользить с конечной скоростью вдоль его поверхности между участками с различной температурой. В приложении к статье он показывает, что при определенных допущениях относительно природы контакта между твердым телом и газом должен быть — при постоянном давлении — поток газа вдоль поверхности от холодных участков к горячим. Последняя из его больших статей на эту тему посвящена теореме Больцмана. Кроме того, Максвелл написал множество небольших заметок, относящихся к родственным вопросам, опубликованных в основном в Нейчур и Британской энциклопедии. Некоторые из них содержат более или менее популярное изложение результатов самого Максвелла, в остальных речь идет об исследованиях других авторов. Почти каждая их страница весьма поучительна, и они изобилуют проницательной критикой тех суждений, с которыми Максвелл не был согласен. Иногда трудно следовать за мыслью Максвелла в больших статьях, популярные же его сочинения отличаются необычайной ясностью и простотой стиля. Читать их всегда интересно.

Первая из статей Максвелла о восприятии цвета взята из Трудов Шотландского Королевского Общества искусств и имеет вид письма к доктору Уилсону, датированного 4-м января 1855 года. За ней сразу следует сообщение в Эдинбургское Королевское Общество. Этот предмет занимал его внимание еще несколько лет. Наиболее важные из относящихся сюда результатов можно найти в статье «Отчет об опытах по восприятию света», опубликованной в XIV томе Философского журнала, и в статье «О теории составных цветов и их отношении к цветам спектра» в Философских трудах за 1860 год. Следует отметить и две лекции в Королевском институте, в которых он с обычной для него

ясностью пересматривает и подкрепляет свои точки зрения. С самого начала Максвелл принял теорию цветовых ощущений Юнга (Young), согласно которой все цвета в конечном итоге сводятся к трем: красному, зеленому и фиолетовому. Эта теория была возвращена к жизни Гельмгольцем (Helmholtz), подведшим под нее физиологический фундамент. Максвелл же, однако, посвятил свои усилия придумыванию точных способов образования и измерения цветовых смесей. Его первый способ получения смесей, цветовой волчок, существовал и раньше, но в руках Максвелла он превратился в инструмент, дающий точные количественные результаты, что позволило менять и измерять количество цветов, смешиваемых в глазе. Для графического представления цвета он, следуя Юнгу, использовал равносторонний треугольник, в вершинах которого располагались основные цвета. Тогда все цвета, включая белый, которые можно было получить смешением в той или иной пропорции основных цветов, представляются точками, лежащими внутри треугольника. Точки же снаружи треугольника представляют цвета, которые, будучи смешанными с одним из основных тонов, дают результат смеси двух остальных или же после смеси с двумя основными могут дать оставшийся третий.

В поздних статьях, особенно в напечатанной в Философских трудах, Максвелл предпочитает работать с ящиком цветов, в котором разные участки спектра можно смешивать в тех или иных пропорциях, а затем согласовывать с белым цветом, соответственно уменьшая его интенсивность. Таким путем получается ряд цветовых уравнений, позволяющий разложить любой цвет по трем основным. Эти наблюдения, на которые Максвелл положил немало труда, до сих пор продолжают оставаться наиболее важными результатами, относящимися к ощущению цвета, и они сохранят свою ценность независимо от того, какая теория физиологии восприятия цвета будет в конце концов принята.

В связи с этими исследованиями ощущений нормального глаза уместно отметить, что Максвелла занимал и вопрос о цветовой слепоте, который рассмотрен им с достаточной подробностью в его статьях.

Еще одним из предметов, интересовавших Максвелла, была геометрическая оптика. Уже в первые годы своего научного пути он начал составлять трактат об оптике, который, однако, так и не был завершен. Первая его статья в этой области «Об общих законах оптических приборов» появилась в 1858 г., но краткое изложение первой ее части докладывалось раньше Кембриджскому философскому обществу.

В ней даны условия, которым должен удовлетворять совершенный оптический прибор, и показано, что если для двух положений предмета его изображения совершенны, то есть свободны от астигматизма, искривлений и искажений, то эти изображения будут совершенными для всех расстояний. Опираясь на этот результат, он находит связь между фокусами входящего и выходящего пучков лучей, силу увеличения и другие характерные величины. Вопросы преломления в сложных системах он позже разобрал с помощью иного подхода в трех статьях, сообщенных Лондонскому математическому обществу. В первой из них (1873) «О фокальных линиях преломленного пучка» он использует характеристическую функцию Гамильтона для определения фокальных линий тонкого пучка при его преломлении из одной изотропной среды в другую для произвольной поверхности раздела. Во второй статье (1874) «О характеристической функции Гамильтона для узкого пучка света» рассмотрена более сложная задача о прохождении луча из одной изотропной среды в другую, когда эти среды разделены третьей произвольной средой. Максвелл находит наиболее общий вид функции Гамильтона двух точек, из которых одна лежит в среде испускания пучка, а другая — в среде входа, причем обе точки близки к главному лучу пучка. Общий результат прилагается затем к двум задачам о нахождении пучка, выходящего (1) из спектроскопа, (2) из оптического прибора, симметричного относительно своей оси. В третьей статье (1875) последняя из упомянутых задач разбирается заново с большей полнотой.

Следует отметить, что все эти статьи объединены одной общей идеей — сперва рассмотреть оптические явления в приборе как нечто целое, не касаясь механизма, осуществляющего эти явления, а уж потом — как в статье 1858 года — использовать конкретные данные о приборе, доставляемые опытом.

С оптическими статьями в некоторой степени связано опубликованное в 1868 году исследование «О циклиде». Как следует из названия, статья эта в основном посвящена геометрическим свойствам указанной поверхности. Но затронуты и другие вопросы, например, о сопряженных с ней изотермических функциях. В первую же очередь исследуются поверхности, ортогональные системе лучей, проходящих через две линии. В сноске к тексту статьи Максвелл описывает изобретенный им стереоскоп, ныне хранящийся в Кавендишской лаборатории.

В 1868-м была также опубликована короткая, но очень важная статья «О наилучшем устройстве для получения чистого спектра на экране».

Связанную группу образуют статьи, посвященные напряжениям, возникающим под действием сил в участках ферм. Первой из них была «О взаимных фигурах и диаграммах сил», опубликованная в 1864 году. Почти сразу за ней следовала статья на родственную тему «О вычислении равновесия и жесткости ферм». В первой из этих статей Максвелл выводит некоторые соотношения взаимности для двух многоугольников, связанных между собой особым образом, и устанавливает свою хорошо известную в графостатике теорему о напряжениях в фермах. Во второй он применяет принципы работы к задачам, связанным с напряжениями в фермах и структурах и с отклонениями, вызванными растяжениями каких-либо соединяющих частей.

Тут следует упомянуть третью статью «О равновесии сферической оболочки». В ней рассмотрены напряжения в оболочке, вызванные системой сил, приложенных к поверхности, а также для случая двух нормальных сил, приложенных в двух произвольных точках, причем дано полное решение задачи. Это решение, использующее принцип инверсии, ранее нашедший применение в электростатике, сводит задачу к определению некоторой функции, впервые введенной сэром Джорджем Эйри. Максвелл назвал ее функцией напряжений Эйри. Методы, с таким успехом развитые в этой статье, по-видимому, побудили Максвелла вернуться к своей прежней работе и расширить установленные в ней свойства взаимности. Так появился его четвертый вклад в эту область «О взаимных фигурах, формах и диаграммах сил». Этот важный мемуар был опубликован в Трудах Эдинбургского Королевского Общества, а затем отмечен премией Кейта (Keith Prize). В начале мемуара содержится удивительно красивый способ построения плоских взаимных диаграмм. Затем обсуждаются геометрия, степени свободы и связи в многогранной ферме, с последующим переходом к предельному случаю, когда грани становятся бесконечно малыми и вместе образуют гладкую поверхность. По ходу изложения Максвелл получает ряд результатов общего характера, относящихся, в частности, к нерастяжимым поверхностям и имеющих практическое значение для анализа нагруженных ферм. Затем он приступает к общей задаче о графическом представлении внутренних напряжений в теле. Опираясь на расширенное толкование «диаграммы напряжений», он дает построение диаграммы, обладающей и механическими, и геометрическими свойствами взаимности по отношению к фигуре, находящейся в напряженном состоянии. Нет никакой возможности опи-

сать здесь хотя бы кратко все эти свойства взаимности, нахождение которых блестяще демонстрирует мощь максвелловских методов. Отметим лишь, что при выполнении некоторых ограничительных условий эта диаграмма позволяет выразить все составляющие напряжений через единственную функцию, аналогичную функции напряжения Эйри. В заключительных разделах мемуара обсуждаются уравнения напряжений и показывается, что общее решение может быть выражено через три функции, аналогичные функции Эйри для двух измерений. Эти результаты прилагаются к частным случаям. Например, дано полное рассмотрение задачи о напряжениях в горизонтальной балке, равномерно нагруженной вдоль верхней границы.

Мы сочли необходимым обрисовать здесь работы Максвелла в тех разделах физики, в которых число этих работ велико. Однако мы не можем описать на этих страницах всего вклада Максвелла в науку. Но об этом читатель может без особого труда узнать из слов самого Максвелла, ибо он, как правило, во введении к каждой статье давал и ясный обзор положения дел в рассматриваемой проблеме, и краткое изложение полученных им результатов. Укажем только несколько мемуаров, хотя и не связанных с другими статьями, но чрезвычайно интересных сами по себе. Наиболее важным из них, по-видимому, можно считать труд о кольцах Сатурна. Сюда же относятся некоторые статьи по динамике, гидромеханике и чистой математике, внесшие весьма полезный вклад в эти разделы науки.

Оставшиеся смешанные статьи могут быть подразделены на (а) лекции и речи, (б) очерки или небольшие трактаты, (в) биографические заметки, (г) рецензии и критические отзывы.

Класс (а) включает его речи перед Британской Ассоциацией, Лондонским математическим обществом, Редевскую лекцию в Кембридже (Rede Lecture at Cambridge), речь на открытии Кавендишской лаборатории и лекции в Королевском институте и в Химическом обществе.

Класс (б) содержит все заметки (кроме одной), написанные для Британской энциклопедии, и заметки того же рода в Нейчур.

В класс (в) входят такие статьи, как «Фарадей» из Британской энциклопедии и «Гельмгольц» из Нейчур.

Наконец, класс (г) в основном состоит из отзывов на недавно опубликованные книги. Они появлялись в Нейчур и наиболее существенные из них перепечатаны здесь.

В некоторых из этих писаний, в частности из класса (б), автор не стесняет себя ограничениями в математической символике; так, например, статья «Капиллярное притяжение» есть попросту целый маленький трактат, где вопрос разбирается со всей требуемой математикой. Лекции относятся к одному из разделов физики, которыми он больше всего занимался — восприятие цвета, действие через среду, молекулярная физика. Ценность их весьма велика. Все эти популярные очерки отличают ясное и стройное изложение принципов, красота в построении текста, сила и точность в доказательствах и выборе примеров. Стиль прост и на редкость свободен от каких-либо туманностей или темнот. Иногда же, например в лекциях, пробивается сдерживаемое красноречие, когда эмоциональная сторона предмета пересиливает рассуждения.

В настоящее собрание не включены книги, написанные или изданные Максвеллом: «Теория теплоты» (первое издание, 1871 год); «Электричество и магнетизм» (первое издание, 1873 год); «Исследования по электричеству достопочтенного Генри Кавендиша, члена Королевского Общества, написанные между 1771 и 1781 годами, изданные по подлинным рукописям, принадлежащим герцогу Девонширскому, Рыцарю Подвязки» (1879 год). К ним можно добавить изящное маленькое введение в динамику под названием «Материя и движение» (издано в 1876 году Обществом по распространению христианского знания). Кроме того, Максвеллу принадлежит раздел в отчете Британской Ассоциации об электрических единицах, изданном впоследствии Флимингом Дженкином в виде книги.

«Теория теплоты» вышла в серии научных учебников, издаваемой Лонгменсом, Грином и К° (Longmans, Green and C°), и сразу же была признана блестящим изложением предмета, часть которого, причем наиболее интересная часть — механическая теория, только начала свое существование, обязанное гению и трудам Ренкина (Rankine), Томсона и Клаузиуса. Особую прелесть трактату Максвелла придает свежесть и новизна изложения, сделавшие книгу столь популярной среди изучающих теплоту.

Уже после смерти Максвелла, в 1881 году, профессор Гарнет завершил и выпустил в свет «Начальный трактат об электричестве», большую часть которого Максвелл успел написать. Цель этого сочинения и его место по отношению к большому трактату видны из следующих слов максвелловского предисловия:

«В этой небольшой книжке я сделал попытку по возможности сжато описать явления, проливающие свет на теорию электричества, и с их помощью выработать у читателя понятия об электричестве.

В большом трактате я зачастую использовал методы, по моему мнению, не самые лучшие, но без которых учащийся не смог бы идти по стопам основоположников математической теории электричества. Но теперь я еще больше убежден в превосходстве методов, родственных подходу Фарадея, и здесь применяю их с самого начала.»

Трудно пока предсказать будущее «Трактата об электричестве и магнетизме», но нет сомнения, что сразу после опубликования он дал направление и окраску всей науке об электричестве. Он стал последним словом мастера о предмете, которому он посвятил многие годы своей жизни, и все, что он здесь сделал, нашло должное место в трактате. Отдельные главы, особенно об электромагнетизме, практически воспроизводят его мемуары с некоторыми, правда, исправлениями и улучшениями. Трактат замечателен разработкой математических подробностей, не уступающей изложению физических принципов, и богат оригинальными главами о математических предметах, связанных с основным содержанием. Сюда относятся разделы о сферических гармониках и об уравнениях Лагранжа в динамике.

Происхождение и развитие идей и понятий Максвелла об электрическом действии, достигших кульминации в трактате, где все они упорядочены и взаимосвязаны, образуют интересную главу не только в истории мышления, но и в истории науки об электричестве. Вряд ли можно переоценить влияние открытий и размышлений Фарадея на Максвелла, который сам рассказал нам, что перед тем, как начать изучение электричества, он принял решение не читать никакой математики, пока не одолеет «Опытных исследований». Но до этого он был многим обязан и идеям, содержащимся в весьма важных статьях сэра У. Томсона об аналогии между теплопроводностью и статическим электричеством и о математической теории равновесного электричества. Вся же последующая деятельность Максвелла, окрашенная одержимостью идеями и подходом Фарадея, являет собой картину могучего интеллекта, терпеливо и упорно проясняющего темные области предмета исследований. Тут его изобретательность была безотказной.

Королевское морское училище.
Гринвич.
Август 1890 г.

Глава 1

Введение

1. Предмет физики. Физика есть тот отдел познания, который изучает господствующий в природе порядок или, другими словами, правильную последовательность событий.

Однако название физики часто относят в более или менее тесном смысле к тем отраслям науки, которые изучают явления самого простого и отвлеченного рода, исключая из рассмотрения более сложные явления, например, те, что наблюдаются в живых существах.

Самым простым случаем является тот, в котором событие или явление может быть описано как изменение в расположении некоторых тел. Так, движение луны можно описать, указывая изменения в ее положении относительно земли в том порядке, в котором они следуют одно за другим.

В других случаях мы можем знать, что произошло некоторое изменение в расположении, но не в состоянии установить, в чем состоит это изменение.

Так, когда замерзает вода, мы знаем, что молекулы, или мельчайшие частицы вещества, должны быть расположены различным образом во льду и в воде. Мы знаем также, что расположение молекул льда должно обладать какой-то симметрией, ибо лед имеет форму симметричных кристаллов, но мы пока еще не имеем точного знания о действительном расположении молекул льда. Однако же всякий раз, когда мы можем полностью описать изменение расположения, мы обладаем знанием о том, что произошло, совершенным постольку, поскольку оно полно, хотя нам предстоит еще изучить, при соблюдении каких условий всегда произойдет такое же явление.

Итак, первая часть физики изучает относительное положение и движение тел.

2. Определение материальной системы. Во всяком научном исследовании мы начинаем с того, что отмечаем определенную область или предмет, как поле для наших изысканий. На нем мы должны сосредоточить наше внимание, исключив из рассмотрения всю остальную

вселенную до тех пор, пока мы не выполним начатого исследования. Поэтому и в физике первый шаг состоит в том, чтобы ясно отграничить материальную систему, которую мы делаем предметом нашего изучения. Эта система может быть любой степени сложности. Это может быть одна материальная частица, тело конечных размеров или некоторое число таких тел, но эта система может даже быть и настолько расширена, что включит весь материальный мир.

3. Определение терминов «внутренний» и «внешний». Все отношения или действия между частями системы называются *внутренними* отношениями или действиями.

Отношения или действия между всей системой или частью ее и телами, не включенными в систему, называются *внешними.* Эти последние мы будем изучать лишь постольку, поскольку они влияют на саму систему, оставляя без рассмотрения их влияние на внешние тела. Отношения и действия между телами, в систему не включенными, должны быть вовсе исключены из рассмотрения. Мы можем исследовать их не иначе как расширяя нашу систему так, чтобы она включила и эти другие тела.

4. Определение конфигурации. Когда материальная система рассматривается с точки зрения относительного положения ее частей, то совокупность относительных положений называется *конфигурацией* системы.

Знание конфигурации системы в данный момент заключает в себе знание положения каждой точки системы относительно каждой другой точки в этот момент.

5. Диаграммы. Конфигурацию материальной системы можно изобразить на модели, плане или диаграмме. Предполагается, что модель или диаграмма походит на материальную систему лишь по форме; нет необходимости, чтобы она походила на нее в других отношениях.

План или карта изображает на бумаге в двух измерениях то, что в действительности, быть может, имеет три измерения и может быть вполне изображено лишь посредством модели. Мы будем пользоваться словом «диаграмма» для обозначения любой геометрической фигуры, безразлично, плоской или нет, посредством которой мы изучаем свойства материальной системы. Таким образом, когда мы говорим о конфигурации системы, то в нашем уме возникает представление о диаграмме, которая вполне изображает конфигурацию, но не имеет

ни одного из остальных свойств материальной системы. Кроме диаграмм конфигурации мы можем иметь диаграммы скорости, напряжения и т. д., которые не воспроизводят формы системы, но при помощи которых можно изучить ее относительные скорости или ее внутренние силы.

6. Материальная частица. Тело, столь малое, что для целей нашего исследования можно пренебречь расстояниями между отдельными его частями, называется *материальной частицей.*

Так, в некоторых астрономических исследованиях каждую планету и даже солнце можно рассматривать, как материальную частицу, потому что различие действий разных частей этих тел не входит в круг нашего внимания. Но нельзя их рассматривать как материальные частицы, когда мы исследуем их вращение. Даже атом, когда мы приписываем ему способность вращаться, нужно себе представлять состоящим из многих материальных частиц.

Диаграмма материальной частицы есть, понятно, математическая точка, не имеющая никакой конфигурации.

7. Относительное положение двух материальных частиц. Диаграмма двух материальных частиц состоит из двух точек, например, A и B.

Положение точки B относительно точки A указывается направлением и длиной прямой линии $\overline{AB}$, проведенной *от* A *к* B. Если мы выйдем из точки A и пройдем в направлении, указанном линией $\overline{AB}$, расстояние, равное длине этой линии, то придем в точку B. Это направление и расстояние могут быть так же хорошо указаны любой другой линией, как, например, $\overline{ab}$, параллельной и равной $\overline{AB}$. Положение точки A относительно B указывается направлением и длиной линии $\overline{BA}$, проведенной *от* B *к* A, или линии $\overline{ba}$, равной и параллельной $\overline{BA}$.

Очевидно, что $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Когда линию называют буквами, поставленными у ее концов, то порядок букв должен всегда соответствовать тому направлению, в котором линия должна быть проведена.

8. Векторы. В геометрии выражение $\overline{AB}$ есть просто название линии. Здесь же оно указывает действие, посредством которого проведена линия, именно, операцию перенесения чертящей точки в некотором направлении на некоторое расстояние. Как указатель этой операции, линия $\overline{AB}$ называется *вектором*, и сама операция вполне опре-

деляется направлением и расстоянием перенесения. Исходная точка, называемая *началом* вектора, может быть где угодно.

Для того чтобы определить конечную прямую линию, мы должны указать ее начало, а также ее направление и длину. Однако принято считать равными все векторы, параллельные между собой, проведенные в одну и ту же сторону и имеющие одинаковую величину.

Всякая величина, имеющая определенное направление и определенный размер, как, например, скорость или сила*, может быть рассматриваема как вектор и изображена на диаграмме прямой линией, направление которой параллельно вектору, а длина представляет в определенном масштабе размер (численное значение) вектора.

9. Система трех частиц. Рассмотрим теперь систему трех частиц.

Ее конфигурация изображается диаграммой из трех точек: A, B и C.

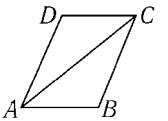


Рис. 1

Положение точки B относительно A указывается вектором $\overline{AB}$, а положение точки C относительно B — вектором $\overline{BC}$.

Очевидно, что по этим данным, если точка A известна, мы можем найти точку B, а затем и точку C, так что конфигурация трех точек вполне определена. Положение точки C относительно точки A указывается вектором $\overline{AC}$, и, согласно последнему замечанию, должно быть возможно вывести значение вектора $\overline{AC}$ из значений векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

Результат операции $\overline{AC}$ состоит в перенесении чертящей точки из A в C. Но результат получится тот же, если перенести чертящую точку сперва из A в B, а затем из B в C, а это есть сумма операций $\overline{AB} + \overline{BC}$.

10. Сложение векторов. Итак, правило сложения векторов может быть изложено таким образом: из какой-либо точки, как начала, проводим ряд последовательных векторов так, чтобы каждый вектор начинался в конце предыдущего. Прямая линия, проведенная из начала к концу ряда, есть вектор, представляющий сумму слагаемых векторов.

---

*Сила полнее определяется как вектор, приложенный к линии ее действия; такой вектор [могущий скользить вдоль прямой, часть которой он составляет] *Клиффорд* называет *ротором*; кроме того, точка приложения силы несущественна лишь в том случае, если тело, на которое она действует, рассматривается как твердое.

Порядок сложения безразличен, ибо если мы напишем $\overline{BC}+\overline{AB}$, то указанную операцию можно выполнить, проведя прямую $\overline{AD}$, параллельную и равную $\overline{BC}$, а затем соединив D и C прямой $\overline{DC}$, которая, по Евклиду I. 33, параллельна и равна $\overline{AB}$, так что в результате этих двух операций мы приходим в точку C, в каком бы порядке мы их ни выполняли.

То же самое справедливо для любого числа векторов, — их можно складывать в каком угодно порядке.

11. Вычитание векторов. Для того чтобы выразить положение точки C относительно B через векторы, указывающие положения точек B и C относительно A, заметим, что можно прийти из B в C, либо перемещаясь вдоль прямой линии $\overline{BC}$, либо переходя из B в A, а затем из A в C.

Отсюда

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{BA}+\overline{AC} = \\ &= \overline{AC}+\overline{BA}, \text{ так как порядок сложения безразличен,} \\ &= \overline{AC}-\overline{AB}, \text{ так как } \overline{AB} \text{ равно и противоположно } \overline{BA}.\end{aligned}$$

Таким образом, вектор $\overline{BC}$, выражающий положение точки C относительно B, находится вычитанием вектора, определяющего B, из вектора определяющего C, причем эти векторы проведены к точкам B и C из какого-либо общего начала A.

12. Начало векторов. Положения любого числа частиц, принадлежащих к материальной системе, могут быть определены посредством векторов, проведенных к каждой из этих частиц из какой-либо одной точки. Эта точка называется началом векторов или, короче, просто *началом.*

Эта система векторов определяет конфигурацию всей системы; ибо, если желаем узнать положение какой-либо точки B относительно какой-нибудь другой точки A, то его можно определить по векторам $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ посредством уравнения

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}.$$

Мы можем выбрать какую угодно точку в качестве начала, и нет пока оснований предпочесть одну точку другой. Конфигурация системы, — другими словами, относительные положения всех ее частей, — остается той же, какая бы точка ни была выбрана за начало. Однако многие исследования упрощаются надлежащим выбором начала.

13. Относительное положение двух систем. Если известны конфигурации двух различных систем, из которых каждая имеет свое собственное начало, и если мы желаем включить обе системы в систему более обширную, имеющую, скажем, то же самое начало, что и первая из двух систем, то должны определить положение начала второй системы относительно начала первой и должны иметь возможность проводить линии во второй системе параллельно линиям первой.

Тогда по § 9 положение точки P второй системы относительно первого начала O представится суммой вектора $\overline{O'P}$ этой точки относительно второго начала O' и вектора $\overline{OO'}$ второго начала O' относительно первого O.

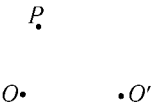


Рис. 2

14. Три данных для сравнения двух систем. Мы имеем пример такого образования большой системы из двух или более меньших систем, когда две соседних нации, произведя каждая съемку и составив карту своей собственной территории, соглашаются соединить свои съемки, чтобы включить обе страны в одну систему. Для этой цели необходимы три вещи.

Во-первых, сравнение начала, выбранного одной страной, с началом, выбранным другой.

Во-вторых, сравнение основных направлений, принятых в обеих странах.

В-третьих, сравнение эталонов длины, принятых в обеих странах.

1. В цивилизованных странах широта всегда считается от экватора, но долгота считается от произвольного места, как Гринвич или Париж. Поэтому, для того чтобы согласовать карту Британии с картой Франции, мы должны определить разность долгот между обсерваториями Гринвича и Парижа.

2. Если съемка была сделана без астрономических инструментов, то за основные направления принимались иногда направления, указываемые магнитным компасом. Так было, я полагаю, при первоначальных съемках некоторых из Вест-Индских островов. Хотя результаты такой съемки и дают правильно местную конфигурацию острова, но они не могут быть точно согласованы с общей картой мира до тех пор, пока не будет установлено отклонение магнитной стрелки от истинного севера в то время, когда производилась съемка.

3. Для того чтобы сравнить съемку Франции со съемкой Британии, метр, французский эталон длины, должен быть сравнен с ярдом, британским эталоном длины.

Ярд определен Актом Парламента 18 и 19 Викт. гл. 72, июля 30, 1855 г., который постановляет, «что прямая линия, или расстояние между центрами поперечных линий, проведенных на двух золотых клепках на бронзовом бруске, хранящемся в палате Казначейства, должна считаться подлинным эталоном ярда при 62° Фаренгейта, а в случае его утраты он должен быть заменен посредством его копий».

Метр введен законом Французской Республики 1795 года. Он определен, как расстояние между концами некоторого платинового стержня, сделанного *Бордá*, когда стержень находится при температуре таяния льда. Измерениями капитана *Кларка* было найдено, что метр равен 39,37043 британским дюймам.

15. Об идее пространства*. Теперь мы прошли большую часть того, на что следовало обратить внимание по отношению к конфигурации материальной системы. Остается, однако, несколько пунктов, относящихся к метафизике вопроса, которые имеют очень важное значение для физики.

Мы описали метод соединения нескольких конфигураций в одну систему, включающую все эти системы. Таким путем мы прибавляем к небольшой области, которую мы можем исследовать, протягивая наши члены, более обширные области, которых мы можем достигнуть, передвигаясь пешком или будучи перевезены. К этим последним мы прибавляем области, о которых узнаем по рассказам других, и те недоступные области, положения которых мы определяем лишь процессом вычисления, пока, наконец, не узнаем, что всякое место занимает определенное положение относительно всякого другого места, будь это место доступно из другого или нет.

Таким образом, из измерений, сделанных на поверхности земли, мы выводим положение центра земли относительно известных предметов и вычисляем число кубических миль в объеме земли, совершенно независимо от какой-либо гипотезы о том, что может находиться в центре земли или в каком-нибудь другом месте под тем тонким слоем земной коры, который мы только и можем непосредственно исследовать.

*Следуя ньютоновскому методу изложения в Principia, допускают существование пространства и течения времени, образующих остов, на который налагается динамическое объяснение явлений. Задача физической астрономии — подвергнуть это предположение проверке и определить этот остов с возрастающей точностью. Его философский базис может рассматриваться как совершенно отличный предмет, с которым связана современная полемика об относительности, поскольку она касается пространства и времени. См. приложение I.

16. Ошибка Декарта. Отсюда следует, что расстояние между одним предметом и другим не зависит от какой-либо материальной вещи между ними, как это, по-видимому, утверждает *Декарт*, когда он говорит (Princip. Phill., II, 18), что если удалить из полого сосуда то, что там находится, без того, чтобы что-либо заняло его место, то стенки сосуда оказались бы в соприкосновении, так как между ними ничего нет.

Это утверждение основано на том догмате *Декарта*, что протяженность в длину, ширину и глубину, составляющая определение пространства, есть единственное существенное свойство материи. «Природа материи, — говорит он, — или тела, рассматриваемого вообще, состоит не в том, что тело твердо, или весомо, или окрашено, а только в его протяженности в длину, ширину и глубину» (Princip. Phill., II, 4). Смешивая, таким образом, свойства материи со свойствами пространства, он и приходит к логическому заключению, что если бы можно было совершенно удалить материю из сосуда, то внутри сосуда пространства больше не существовало бы. Действительно, он принимает, что все пространство должно быть всегда заполнено материей.

Я указал на это мнение *Декарта* для того, чтобы показать важность здравых взглядов в элементарной динамике. В действительности, основное свойство материи было отчетливо сформулировано *Декартом* в «Первом законе природы», как он его называет (Princip., II, 37): «Каждый отдельный предмет, поскольку это от него зависит, стремится сохранить свое состояние движения или покоя»*.

Мы увидим, когда придем к ньютоновым законам движения, что в словах: «поскольку это от него зависит», правильно понятых, заключается истинное первоначальное определение материи и истинная мера ее количества. *Декарт* никогда, однако, не доходил до полного понимания своих собственных слов (quantum in se est) и впал в свое первоначальное смешение материи с пространством, — причем пространство, по его мнению, есть единственная форма вещества, а все существующие предметы суть только проявления пространства. Эта ошибка** проходит через все части большого труда *Декарта* и образует одно из основных положений системы *Спинозы*. Я не буду пытаться проследить ее до новейшего времени, но советовал бы всякому, кто изучает какую-нибудь

---

*Сравните с идеей наименьшего действия, приложение II.

**Некоторые современные формы относительности вернулись к его идеям. Ср. приложение I.

метафизическую систему, тщательно исследовать ту часть ее, которая имеет дело с физическими идеями.

Мы считаем более способствующим научному прогрессу признать, вместе с *Ньютоном*, идеи времени и пространства отличными, по крайней мере в воображении, от понятия материальной системы, для выражения свойств которой и служат эти идеи*.

17. Об идее времени. Идея времени в ее первоначальной форме есть, вероятно, сознание последовательности состояний нашего сознания. Если бы моя память была совершенна, то я был бы в состоянии отнести каждое событие в пределах моего опыта на надлежащее место в некотором хронологическом ряду. Но мне было бы трудно, если не невозможно, сравнить промежуток между одной парой событий с промежутком между другой парой, — определить, например, больше или меньше теперь то время, в течение которого я могу работать, не чувствуя усталости, чем тогда, когда я только начал учиться. Благодаря нашим отношениям с другими людьми и изучению естественных процессов, протекающих равномерным или ритмическим образом, мы приходим к признанию возможности создать систему хронологии, в которой должно найти себе место всякое событие, относящееся как к нам, так и к другим. Из любых двух событий, как, например, какая-то катастрофа на звезде в Северной Короне, вызвавшая световые эффекты, изученные спектроскопически *Гёггинсом* 16 мая 1866 г., и наитие мысли, которое побудило профессора *Адамса* или *Леверрье* начать изыскания, приведшие к открытию доктором *Галле* 23 сентября 1846 г. планеты Нептун, первое должно было произойти либо раньше, либо позже другого, либо в одно и то же время.

Абсолютное, истинное и математическое время принимается *Ньютоном*, как протекающее с постоянной скоростью, независимой от быстроты или медленности движений материальных предметов; оно называется также *длительностью*. Относительное, наблюдаемое и общеупотребительное время есть длительность, измеряемая по движению тел, например, днями, месяцами и годами. Эти меры времени могут быть рассматриваемы как предварительные, так как прогресс астрономии научил нас измерять неравенство длин дней, месяцев и лет и тем приводить наблюдаемое время к более равномерной шкале, называемой средним солнечным временем.

---

*См. приложение I.

18. Абсолютное пространство. Абсолютное пространство понимается, как остающееся всегда подобным самому себе и неподвижным. Расположение частей пространства так же не может быть изменено, как и порядок частей времени. Вообразить, что они сдвинулись со своих мест, все равно, что представить себе, что место отодвинулось само от себя.

Но подобно тому, как нет ничего, что отличало бы один момент времени от другого, кроме различных событий, которые в эти моменты произошли, так нет ничего, что отличало бы одну часть пространства от другой, кроме их отношения к месту материальных тел. Мы не можем определить время события иначе, как отнеся его к какому-нибудь другому событию, — и не можем описать место тела иначе, как отнеся его к какому-нибудь другому телу. Все наше знание как о времени, так и о пространстве, по существу, относительно*.

Когда человек приобрел привычку соединять слова, не затрудняя себя образованием мыслей, которые соответствовали бы словам, то ему легко выдумать противоположение между относительным и так называемым абсолютным знанием и выставить наше незнание абсолютного положения точки, как пример ограниченности наших способностей. Однако всякий, кто попытается вообразить себе состояние ума, способного знать абсолютное положение точки, всегда затем будет доволен нашим относительным знанием.

19. Изложение общего принципа физических наук. Существует принцип, на который часто ссылаются: «Одинаковые причины всегда производят одинаковые следствия».

Чтобы сделать этот принцип понятным, нужно определить, что мы понимаем под одинаковыми причинами и одинаковыми следствиями, так как очевидно, что никакое событие никогда не случается больше одного раза, так что причины и следствия не могут быть одинаковыми во *всех* отношениях. В действительности, под этим разумеют, что если причины отличаются только по абсолютному времени и абсолютному пространству, к которым они приурочены, то только в этом смысле будут отличаться и следствия.

Нижеследующее положение, эквивалентное приведенному выше принципу, представляется более определенным, более ясно связанным

*Это положение, по-видимому, состоит в том, что наше знание относительно, но нуждается в определенном пространстве и времени для своего связного изложения.

с идеями пространства и времени и более пригодным для приложения к отдельным случаям:

«Различие между двумя событиями не зависит от простого различия времен и мест, в которых они происходят, а только от различий в природе, конфигурации или движении участвующих тел.»

Из этого положения следует, что если событие произошло в данное время и в данном месте, то возможно, чтобы точно такое же событие произошло в любое другое время и в любом месте.

Существует другой принцип, который не следует смешивать с приведенным в начале этого параграфа: «Подобные причины производят подобные следствия».

Это справедливо лишь в том случае, если небольшие изменения начальных условий производят лишь небольшие изменения в конечном состоянии системы*. В очень большом числе физических явлений это условие удовлетворяется; но бывают другие случаи, в которых небольшое начальное изменение может произвести очень большое изменение в конечном состоянии системы, как в том случае, когда перевод стрелки заставляет железнодорожный поезд перейти на другие рельсы вместо того, чтобы продолжать свой надлежащий путь**.

---

*Здесь скрыто молчаливое допущение, что законы природы можно формулировать лишь при условии устойчивости явлений; это ставит, пожалуй, некоторую границу всякому постулату всеобщего физического детерминизма, в который, например, верил Лаплас.

**Может быть, можно сказать, что наблюдаемые в природе правильности принадлежат к статистическим молекулярным явлениям, принявшим состояние устойчивости. Поскольку погода зависит от бесконечного числа местных неустойчивых явлений, она не может быть вовсе подчинена конечной схеме закона.

Глава 2

О движении

20. Определение перемещения. До сих пор мы сравнивали положение различных точек системы в один и тот же момент времени. Теперь нам предстоит сравнить положение точки в данный момент с ее положением в предшествующий момент, называемый *начальным*[1].

Вектор, указывающий конечное положение точки относительно ее положения в некоторый начальный момент, называется *перемещением* этой точки. Так, если A_1 есть начальное, а A_2 — конечное положение точки A, то линия $\overline{A_1A_2}$ есть перемещение точки A, и некоторый вектор $\overline{oa}$, проведенный из начала o, параллельный и равный линии $\overline{A_1A_2}$, изображает это перемещение.

21. Диаграмма перемещений. Если другая точка системы переместилась из B_1 в B_2, то вектор $\overline{ob}$, параллельный и равный линии $\overline{B_1B_2}$, изобразит перемещение точки B.

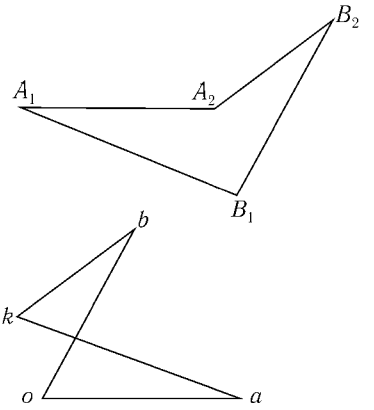


Рис. 3

Подобным же образом перемещения любого числа точек могут быть представлены векторами, проведенными из одного и того же начала o. Эта система векторов называется *диаграммой перемещений*. Нет необходимости действительно проводить линии, чтобы представить эти векторы; достаточно отметить точки a, b и т. д. — концы векторов. Диаграмму перемещений можно, поэтому, рассматривать как состоящую из некоторого числа точек, a, b и т. д., соответствующих материальным частицам, A, B и т. д., принадлежащим системе вместе с точкой o, положение которой произвольно и которая принята за начало всех векторов.

[1] *Максвелл* употребляет термин «эпоха»; ныне обычно пользуются выражением: «начальный момент». — *Н. А.*

22. Относительное перемещение. Линия $\overline{ab}$ на диаграмме перемещений представляет перемещение точки B относительно точки A.

Ибо, если мы проведем на диаграмме перемещений (рис. 3) линию $\overline{ak}$, параллельную и равную $\overline{B_1A_1}$ и имеющую то же направление, и соединим точки k и B, то легко показать, что вектор $\overline{kb}$ равен и параллелен вектору $\overline{A_2B_2}$. Действительно, вектор $\overline{kb}$ есть сумма векторов $\overline{ka}$, $\overline{ao}$ и $\overline{ob}$, а $\overline{A_2B_2}$ есть сумма векторов $\overline{A_2A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{B_1B_2}$. Но из них $\overline{ka}$ есть то же самое, что $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ao}$ — то же, что и $\overline{A_2A_1}$, и $\overline{ob}$ есть то же, что $\overline{B_1B_2}$, а так как по § 10 порядок сложения безразличен, то вектор $\overline{kb}$ равен по величине и по направлению вектору $\overline{A_2B_2}$.

Но ведь $\overline{ka}$ или $\overline{A_1B_1}$ представляет начальное положение точки B относительно A, а $\overline{kb}$ или $\overline{A_2B_2}$ представляет конечное положение точки B относительно A. Отсюда, $\overline{ab}$ изображает перемещение точки B относительно A, что и требовалось доказать.

В § 20 мы умышленно не сказали, есть ли начало, к которому была отнесена первоначальная конфигурация, и начало, к которому отнесена конечная конфигурация, — одна и та же точка или же за время перемещения системы переместилось и начало.

Предположим теперь, что начало совершенно неподвижно и что перемещения, изображаемые векторами $\overline{oa}$, $\overline{ob}$ и т. д., суть абсолютные перемещения. Чтобы перейти отсюда к тому случаю, когда начало переместилось, мы должны только взять за начало точку A, одну из движущихся точек. Так как абсолютное перемещение точки A представлено вектором $\overline{oa}$, то перемещение точки B относительно A изобразится, как мы видели, вектором $\overline{ab}$; то же относится и ко всякой другой точке системы.

Расположение точек a, b и т. д. на диаграмме перемещений будет поэтому то же самое, относим ли мы перемещения к неподвижной или к переместившейся точке; единственное различие состоит в том, что мы принимаем различное начало векторов на диаграмме перемещений, причем правило таково, что какую бы мы точку ни приняли, неподвижную или движущуюся, за начало на диаграмме конфигурации, мы принимаем соответствующую точку за начало на диаграмме перемещений. Если мы желаем отметить, что мы совершенно ничего не знаем об абсолютном перемещении в пространстве любой точки системы, мы можем это сделать, построив диаграмму перемещений как простую систему точек, ничем не указывая, какую из них мы принимаем за начало.

Такая диаграмма перемещений (без начала) представит не более и не менее того, что мы можем вообще знать о перемещении системы. Она просто состоит из некоторого числа точек, a, b, c и т. д., соответствующих точкам A, B, C и т. д. материальной системы, и вектор, например $\overline{ab}$, представит перемещение точки B относительно A.

23. Поступательное перемещение[1]**.** Когда перемещения всех точек материальной системы относительно внешней точки одинаковы по направлению и величине, то диаграмма перемещений сводится к двум точкам — одна соответствует внешней точке, а другая — любой и всякой точке перемещающейся системы. В этом случае точки системы не перемещаются одна относительно другой, но только относительно внешней точки.

Такого рода перемещение происходит, когда тело неизменяемой формы движется параллельно самому себе. Его можно назвать поступательным перемещением.

24. О движении. Если изменение конфигурации системы рассматривается лишь с точки зрения ее состояния в начале и конце процесса изменения, без отношения ко времени, в течение которого это изменение происходит, то оно называется перемещением системы.

Если же мы обращаем внимание на самый процесс изменения, как происходящий в продолжение определенного времени и непрерывным образом, то изменение конфигурации приписывается *движению* системы.

25. О непрерывности движения. Когда материальная частица перемещается, переходя от одного положения к другому, она может это сделать, только следуя от первого положения ко второму по некоторому пути или траектории.

В каждый момент движения частица будет находиться в какой-нибудь точке траектории, и если мы выберем какую-либо точку на ней, то частица пройдет через эту точку за время своего движения по крайней мере один раз[2].

---

[1] *Максвелл* употребляет термин «uniform»; мы остановились на термине «поступательный», как утвердившемся в русской литературе. При таком переводе примечание *Максвелла*, объяснявшее слово «uniform», стало излишним и выкинуто нами. — *Н. А.*

[2] Если траектория сама себя пересекает, образуя петлю, как PQR (рис. 4), то частица пройдет через точку пересечения Q дважды; если же частица возвращается

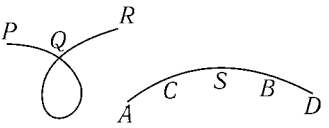


Рис. 4

Вот что подразумевают, когда говорят, что частица описывает непрерывную траекторию. Движение материальной частицы, непрерывно происходящее во времени и в пространстве, есть пример и образец всякой формы непрерывности.

26. О постоянной[1] скорости. Если движение частицы таково, что в равные промежутки времени, как бы они ни были малы, перемещения частицы равны и имеют одинаковое направление, то говорят, что частица движется с постоянной скоростью.

Очевидно, что в этом случае траектория тела будет прямой линией, и длина любой части траектории будет пропорциональна времени, в течение которого эта часть описана.

Быстрота движения называется скоростью частицы, и величину ее выражают, говоря, что такое-то расстояние пройдено в такое-то время, как, например, десять миль в час или один метр в секунду. Вообще, мы выбираем единицу времени, например секунду, и измеряем скорость расстоянием, пройденным в единицу времени.

Если метр проходится в секунду, и если скорость постоянна, то тысячная или миллионная часть метра будет пройдена в тысячную или миллионную долю секунды. Итак, если мы можем наблюдать или вычислить перемещение в течение любого промежутка времени, как бы он ни был мал, то можно вывести расстояние, которое было бы описано с той же самой скоростью в более продолжительное время. Этот результат, дающий возможность в течение короткого промежутка времени определить скорость, не зависит от того, продолжало ли тело в действительности двигаться с этой скоростью в течение более долгого времени. Таким образом, мы можем знать, что тело движется со скоростью десяти миль в час, хотя его движение с этой скоростью может продолжаться лишь сотую долю секунды.

27. Об измерении переменной скорости. Если скорость частицы не постоянна, то ее значение в любой данный момент измеряется расстоянием, которое было бы пройдено в единицу времени телом, имеющим такую же скорость, какую имеет частица в этот момент.

по собственному следу, как, напр., в случае пути A, B, C, D, то она может пройти через одну и ту же точку S три или более раз.

[1] Если последовательные значения какой-нибудь величины в последовательные моменты времени равны, то говорят, что величина *постоянна*.

Так, когда мы говорим, что в данный момент, например, через одну секунду после того, как тело начало падать, его скорость есть 980 сантиметров в секунду, то мы под этим разумеем, что если бы скорость частицы была постоянна и равна скорости падающего тела в данный момент, то она прошла бы 980 сантиметров в секунду.

Очень важно точно усвоить, что значит скорость или быстрота движения тела, ибо идеи, которые возникают в нашем уме при рассмотрении движения частицы, суть те самые, которыми воспользовался *Ньютон* в своем методе *флюкций*[1], и они же были причиною большого расцвета точных наук в новейшее время.

28. Диаграмма скоростей. Если скорость каждого из тел системы постоянна и если мы сравним конфигурации системы в моменты, разделенные промежутком в единицу времени, то перемещения, как пройденные в единицу времени телами, движущимися с постоянными скоростями, будут представлять эти самые скорости, согласно методу измерения, описанному в § 26.

Если скорости в действительности не остаются постоянными в течение единицы времени, то мы должны вообразить себе другую систему, состоящую из такого же числа тел, скорости которых равны скоростям соответствующих тел системы в данный момент, но остаются постоянными в течение единицы времени. Перемещения этой системы представят скорости действительной системы в данный момент.

Другой способ получения диаграммы скоростей системы в данный момент состоит в следующем. Берут малый промежуток времени, скажем, n-ю часть единицы времени, так чтобы середина этого промежутка соответствовала данному моменту. Берут диаграмму перемещений, соответствующую этому промежутку, и увеличивают все ее измерения в n раз. В результате получится диаграмма *средних* скоростей системы в течение этого промежутка. Если предположим теперь, что число n безгранично возрастает, то промежуток будет безгранично уменьшаться, а средние скорости безгранично приближаться к действительным скоростям в данный момент. Наконец, когда n становится бесконечно большим, диаграмма будет точно изображать скорости в данный момент.

[1]Согласно методу флюкций, когда значение одной величины зависит от значения другой, то быстрота изменения первой величины относительно второй может быть выражена как скорость, если вообразить, что первая величина представляет перемещение частицы, между тем как вторая равномерно течет вместе с временем.

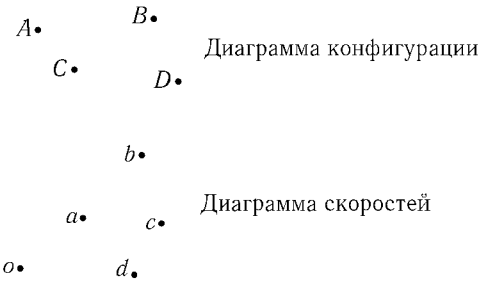


Рис. 5

29. Свойства диаграммы скоростей. Диаграмма скоростей для системы, состоящей из собрания материальных частиц, состоит из некоторого числа точек, из которых каждая соответствует одной из частиц.

Скорость какой-нибудь частицы B относительно другой, A, изображается по направлению и величине линией $\overline{ab}$, проведенной на диаграмме скоростей от точки a, соответствующей частице A, к точке b, соответствующей B.

Таким путем мы можем определить посредством диаграммы относительную скорость любых двух частиц. Диаграмма ничего не говорит нам об абсолютной скорости какой-либо точки; она точно выражает то, что мы можем знать о движении, и ничего больше. Если мы вообразим, что вектор $\overline{oa}$ представляет абсолютную скорость частицы A, то абсолютная скорость другой частицы, B, будет представлена вектором $\overline{ob}$, проведенным из o, как начала, к точке b, соответствующей B.

Но как невозможно определить положение тела иначе, как относительно положения некоторой точки референции[1], так же невозможно определить скорость тела иначе, как относительно точки референции. Выражение «абсолютная скорость» имеет так же мало смысла, как «абсолютное положение». Лучше, поэтому, не выделять на диаграмме скоростей никакой точки как начала, но рассматривать диаграмму как выражение соотношений всех скоростей, не определяющее абсолютного значения ни одной из них.

[1] Термин «референция» начинает утверждаться в русской научной литературе. Точка референции — точка, к которой условились относить величины, связанные с другими точками. — *Н. А.*

30. Смысл выражения «в покое». Когда мы говорим, что тело находится в покое, то употребляем выражение, которое, по-видимому, что-то утверждает об этом теле, рассматриваемом само по себе, и можно было бы думать, что скорость другого тела, рассчитанная относительно тела, находящегося в покое, была бы его истинной и единственной абсолютной скоростью. Но выражение «в покое» означает в обыденной речи: «не имеющее скорости относительно того, на чем тело находится», как, например, относительно поверхности земли или палубы корабля. Оно не может означать больше этого.

Поэтому ненаучно различать покой и движение, как два различных состояния тела самого по себе, так как невозможно говорить о теле, как о находящемся в покое или в движении, иначе как по отношению, выраженному явно или подразумеваемому, к некоторому другому телу.

31. Диаграмма изменений скорости. Подобно тому, как мы сравнивали скорости различных тел в одно и то же время, можно сравнивать и относительные скорости одного тела по отношению к другому в различные времена.

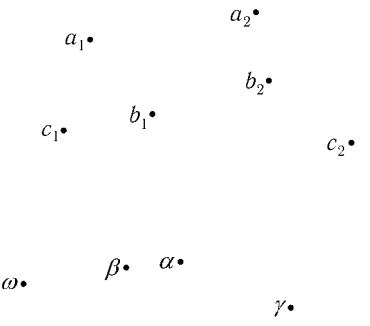


Рис. 6

Если a_1, b_1, c_1 есть диаграмма скоростей начального состояния системы тел A, B, C, а a_2, b_2, c_2 — диаграмма скоростей конечного состояния системы, то приняв точку ω за начало и проведя вектор $\overline{\omega\alpha}$, равный и параллельный $\overline{a_1a_2}$, $\overline{\omega\beta}$, равный и параллельный $\overline{b_1b_2}$, $\overline{\omega\gamma}$, равный и параллельный $\overline{c_1c_2}$, получим диаграмму, состоящую из точек α, β, γ и т. д., такого рода, что какая-нибудь линия $\overline{\alpha\beta}$ на этой диаграмме изображает по направлению и величине изменение скорости тела B относительно A. Эта диаграмма может быть названа диаграммой *изменений скорости*[1].

32. Об изменении скорости. Изменение скорости может состоять в увеличении, уменьшении или изменении направления ее. Итак, вместо того, чтобы различать как в обыденном языке между ускоре-

[1]Термин «Total Acceleration» мог бы быть, ближе к *Максвеллу*, передан: «интегральное ускорение»; но мы сочли более подходящим для наших читателей термин, уже твердо установившийся в русской литературе. — *Н. А.*

нием, замедлением и отклонением движения тела, мы говорим, что изменение скорости может происходить по направлению движения, в противоположном направлении или под углом к этому направлению.

Подобно тому как перемещение системы определяется как изменение ее конфигурации, определяется и изменение скоростей системы. Процесс построения диаграммы изменений скорости сравнением начальной и конечной диаграмм скоростей есть тот же самый, посредством которого была построена диаграмма перемещений из сравнения начальной и конечной диаграмм конфигурации.

33. Об ускорении. До сих пор мы рассматривали изменение скорости, имеющее место за некоторый промежуток времени. Если быстрота этого изменения постоянна, то она измеряется изменением скорости в единицу времени. Если же она переменна, то ее значение в данный момент измеряется изменением скорости в единицу времени такой точки, у которой быстрота изменения скорости постоянна и такова же, как у частицы в данный момент.

Из этого определения ясно, что метод нахождения быстроты изменения скорости по величине этого изменения за всякое данное время совершенно подобен тому методу, посредством которого скорость в некоторый момент была найдена из знания перемещений за всякое данное время.

Диаграмма изменений скорости, построенная для промежутка в n-ю часть единицы времени и затем увеличенная в n раз, есть диаграмма *среднего ускорения* в течение этого промежутка; беря промежуток все меньшим и меньшим, мы наконец придем к *истинному ускорению* в середине этого промежутка.

В виду того, что ускорение приходится в физике рассматривать гораздо чаще, чем изменение скорости, слово «ускорение» стало применяться в том смысле, в каком мы до сих пор пользовались выражением «быстрота изменения скорости».

Поэтому в дальнейшем, когда мы будем пользоваться словом «ускорение», мы будем разуметь то, что здесь называли быстротой изменения скорости.

34. Диаграмма ускорений. Диаграмма ускорений есть система точек, каждая из которых соответствует одному из тел материальной системы, причем какая-нибудь линия $\overline{\alpha\beta}$ на диаграмме изображает ускорение тела B относительно тела A.

Здесь будет кстати заметить, что на диаграмме конфигурации мы пользуемся заглавными латинскими буквами A, B, C и т. д. для обозначения относительного положения тел системы; на диаграмме скоростей мы пользуемся строчными латинскими буквами a, b, c и т. д. для обозначения относительных скоростей этих тел; а в диаграмме ускорений мы пользуемся греческими буквами α, β, γ и т. д. для обозначения их относительных ускорений.

35. Ускорение как относительное понятие. Ускорение, подобно положению и скорости, есть относительное понятие и не может быть истолковано абсолютным образом*.

Если бы каждая частица материального мира, находящаяся в пределах достижения наших средств наблюдения, изменила в данный момент свою скорость прибавлением к ней новой скорости, одинаковой по величине и направлению для каждой такой частицы, то все относительные движения тел внутри системы сохранились бы совершенно неизменными, и ни астрономы, ни физики, какими бы инструментами они ни пользовались, не были бы в состоянии обнаружить, что нечто случилось**.

Лишь в том случае, если изменение движения происходит различным образом для различных тел системы, имеет место то или иное событие, доступное наблюдению.

---

*Достойный замечания пример относительности представляет исследование *Эйлера* о движении твердого тела, определяемом относительно последовательности его собственных мгновенных положений.

**Это, пожалуй, слишком смелый постулат относительности: всеобщее добавочное ускорение может не оказать влияния *в продолжение своего возникновения* лишь в том случае, если *все* приложенные силы пропорциональны массам. См. приложение I.

Глава 3

О силе

36. Кинематика и кинетика. До сих пор мы рассматривали движение системы с его чисто геометрической стороны. Мы показали, как изучать и описывать движение такой системы, как бы оно ни было произвольно, но не принимали в расчет ни одного из тех условий движения, которые возникают из взаимодействия между телами.

Теория движения, излагаемая таким образом, называется *кинематикой.* Если принимается в расчет взаимодействие между телами, то наука о движении называется *кинетикой*, если же обращается особое внимание на силу, как причину движения, то она называется *динамикой.*

37. Взаимодействие между двумя телами — напряжение. Взаимодействие между двумя частями материи получает различные названия в зависимости от точки зрения, с которой оно изучается, а эта точка зрения зависит от протяжения материальной системы, составляющей предмет нашего внимания.

Если мы рассматриваем явление взаимодействия между двумя частями материи в целом, то мы его называем *напряжением.* Это напряжение, в зависимости от способа его действия, может быть описано как притяжение, отталкивание, натяжение, давление, сдвиг, кручение и т. д.

38. Внешняя сила. Но если мы, как в § 2, сосредоточим наше внимание на одной из частей материи, то увидим только одну сторону взаимодействия, — именно ту, которая влияет на рассматриваемую нами часть материи, — и эту сторону явления мы назовем, с точки зрения ее эффекта, *внешней силой*, действующей на эту часть материи, а с точки зрения ее причины мы назовем ее *действием* другой части материи. Противоположная сторона напряжения называется *противодействием* на другую часть материи.

39. Различные стороны одного и того же явления. В коммерческих делах одна и та же сделка между двумя лицами называется куплей, с точки зрения одного участника, продажей, с точки зрения другого, и торговой сделкой, если мы принимаем в рассмотрение обоих.

Счетовод, который будет осматривать записи о сделке, найдет, что оба участника внесли ее в противоположные стороны своих главных книг; сравнивая книги, он должен в каждом случае помнить, для кого составлена каждая книга.

По той же причине и в динамических исследованиях мы должны всегда помнить, с каким из двух тел мы имеем дело, чтобы мы могли установить, какие силы надо внести в приход данного тела, и не вписали ни одной из сил в ненадлежащую сторону счета.

40. Законы движения Ньютона. Внешняя или «приложенная» сила, рассматриваемая с точки зрения ее действия*, — именно изменения движений тел, — вполне определяется и описывается в трех законах движения Ньютона.

Первый закон говорит, при каких условиях не существует внешней силы.

Второй показывает, как измерить силу, когда она существует.

Третий сравнивает обе стороны действия между двумя телами, поскольку оно влияет на каждое из этих тел.

41. Первый закон движения. *Закон* I. — *Всякое тело продолжает пребывать в своем состоянии покоя или равномерного движения по прямой линии, пока внешние силы не заставят его изменить это состояние.*

Экспериментальным доказательством истинности этого закона является тот факт, что в каждом случае, когда мы наблюдаем изменение состояния движения тела, мы можем приписать это изменение некоторому взаимодействию между этим телом и другим, т. е. внешней силе. Существование этого взаимодействия указывается его влиянием на другое тело, если движение этого тела доступно наблюдению. Так, например, движение пушечного ядра замедляется, но это замедление возникает из взаимодействия снаряда с окружающим его воздухом, причем ядро испытывает силу в направлении, противоположном его относительному движению, между тем как воздух сам приходит в движение, толкаемый вперед равной силой, и образует то, что называют *ветром* пушечного ядра.

---

*Что касается ее природы, то напряжение, или уравновешенная система сил, определяется по изменению постоянной конфигурации участвующих тел, которое обнаруживает его существование и образует базис для его статического измерения, или по какому-нибудь другому свойству материи. Ср. § 68.

Но наше убеждение в истинности этого закона может значительно укрепиться, если рассмотрим, к чему приводит его отрицание. Дано тело в движении. Пусть в данный момент оно предоставлено самому себе, и никакие силы на него не действуют. Что произойдет? Согласно закону *Ньютона*, оно будет сохранять равномерное прямолинейное движение, т. е. его скорость будет оставаться постоянной по направлению и по величине.

Пусть скорость не остается постоянной, — предположим, что она изменяется. Изменение скорости, как мы видели в § 31, должно иметь определенное направление и величину. По принципу § 19, это изменение должно быть одинаково, каково бы ни было время или место опыта. Следовательно, направление изменения движения должно определяться либо направлением самого движения, либо некоторым направлением, неразрывно связанным с телом.

Предположим, прежде всего, что закон таков, что скорость уменьшается с определенной быстротой, которую мы можем, для доказательства, предположить столь незначительной, что никакими опытами над движущимися телами мы не могли бы открыть уменьшение скорости за сотни лет.

Скорость, указываемая этим гипотетическим законом, может быть только скоростью относительно точки, находящейся в абсолютном покое; ибо, если это относительная скорость, то как ее направление, так и ее величина зависит от скорости точки референции.

Если, будучи отнесено к некоторой точке, тело кажется движущимся к северу с убывающей скоростью, то стоит лишь отнести его к другой точке, движущейся к северу с постоянной скоростью, большей, чем скорость тела, как оно будет казаться движущимся к югу с возрастающей скоростью.

Итак, гипотетический закон не имеет смысла, если мы не допускаем возможности определения абсолютного покоя и абсолютной скорости*.

Даже если бы мы допустили эту возможность, и гипотетический закон оказался бы верным, его можно было бы истолковать не как противоречие закону *Ньютона*, а как доказательство сопротивления некоторой среды в пространстве.

---

*По отношению к эфиру можно было бы сделать это. Но даже в максвелловском эфире изолированное тело, теряющее энергию лучеиспусканием, не претерпело бы при этом изменения скорости.

Возьмем другой случай. Предположим, что закон таков, что тело, на которое не действует никакая сила, сразу перестает двигаться. Это не только противоречит опыту, но и ведет к определению абсолютного покоя, как состояния, которое принимает тело, когда оно освобождается от действия внешних сил.

Таким образом, можно показать, что отрицание закона *Ньютона* находится в противоречии с единственной системой стройного учения о пространстве и времени, которую человеческий ум был в состоянии создать*.

42. О равновесии сил. Если тело движется с постоянной скоростью по прямой линии, то внешние силы, если они на него действуют, уравновешивают друг друга или находятся в *равновесии.*

Так, если вагон в железнодорожном поезде движется с постоянной скоростью по прямой линии, то внешние силы, действующие на него, — как тяга вагона, находящегося впереди него, влекущая его вперед, задерживающее действие заднего вагона, трение рельс и сопротивление воздуха, действующие назад, вес вагона, действующий вниз, и давление рельс, действующее вверх, — должны точно уравновесить друг друга.

---

*Доказательство этого параграфа может быть сделано более определенным. Как показывают наблюдения, чем более тело изолировано от влияния других тел, тем ближе его скорость к постоянной по отношению к определенной системе референции. Главная задача физической динамики — определить с возрастающим приближением систему, по отношению к которой этот закон справедлив для всех систем, с наибольшей достижимой точностью. Система пространства и времени, определенная таким образом, называется (по *Джеймсу Томсону*) *инерциальной средой.* Изложенное в тексте может быть перестроено по отношению к системе референции, являющейся инерциальной средой. Но если дана одна инерциальная среда, то всякая другая среда, движущаяся относительно нее с постоянной поступательной скоростью, есть также инерциальная среда. Так, первым приближением для местных целей к инерциальной среде является среда, неподвижно связанная с окружающей местностью; когда класс изучаемых явлений расширяется, то астрономы должны перейти к среде, содержащей ось суточного вращения земли и связанной с определенным значением для длины звездных суток; это последнее в свою очередь должно быть исправлено на очень медленное движение земной оси, которое обнаруживается предварением равноденствий, и т. д. Такую инерциальную среду представляет практически по существу ньютоновское абсолютное пространство и время, и это самая простая и естественная схема построения системы протяженности, в которую могут уложиться динамические явления. Если мы примем, что пространство заполнено однородным статическим эфиром, через посредство которого передаются влияния от одного тела к другому, то свойства этой среды доставят единственное определение абсолютного пространства и времени, имеющих как физические свойства, так и свойства протяженности. См. приложение I.

Тела, находящиеся в покое относительно поверхности земли, в действительности движутся, причем их движение не равномерно и не прямолинейно. Следовательно, действующие на них силы не уравновешиваются. Кажущийся вес тел оценивается по той силе, которую нужно направить вверх для того, чтобы удержать их в покое относительно земли. Поэтому наблюдаемый вес меньше притяжения земли и образует с земной осью меньший угол, так что соединенное действие поддерживающей силы и земного притяжения есть сила, перпендикулярная к земной оси, величины как раз достаточной для того, чтобы удержать тело на круговой траектории, которую оно должно описывать, если покоится на земле*.

43. Определение равных времен. Первый закон движения, устанавливая при каких обстоятельствах скорость движущегося тела остается постоянной, доставляет нам метод определения равных промежутков времени. Пусть материальная система состоит из двух тел, которые не действуют друг на друга и на которые не действует никакое тело, внешнее по отношению к системе. Если одно из этих тел движется по отношению к другому, то относительная скорость, по первому закону движения, будет постоянна и направлена по прямой линии.

Итак, промежутки времени равны, если равны относительные перемещения в течение этих промежутков**.

С первого взгляда может показаться, что это не более, как определение того, что мы понимаем под равными промежутками времени, — выражение, которому мы до сих пор вовсе не дали определения.

Но если мы предположим, что существует другая движущаяся система двух тел, на каждое из которых не действует никакое тело, то эта вторая система даст нам независимый метод сравнения промежутков времени.

Положение, что равные промежутки времени суть такие, в течение которых происходят равные перемещения во всякой такой системе, рав-

*См. конец приложения I.

**Это положение относится к перемещению одного тела, измеряемому относительно полной системы референции, связанной с другим. Оно не было бы верно для двух точек, движущихся с постоянными скоростями, если под относительным перемещением понимать просто изменение расстояния между ними. В действительности их взаимное расстояние испытывает ускорение, изменяющееся обратно пропорционально кубу этого расстояния; наблюдателю, лишенному чувства направления, казалось бы, что они взаимно отталкиваются с силой, подчиняющейся этому закону действия.

носильно, поэтому, утверждению, что сравнение промежутков времени ведет к одинаковому результату, пользуемся ли мы первой системой двух тел или второй, как прибором для измерения времени.

Таким образом, мы видим теоретическую возможность сравнения промежутков времени, как бы они ни были удалены один от другого, хотя вряд ли нужно говорить, что этот метод не может быть применен на практике вблизи земли или всякой другой большой массы притягивающей материи.

44. Второй закон движения. *Закон* II. — *Изменение движения пропорционально приложенной силе и происходит по тому направлению, по которому действует сила.*

Под «движением» *Ньютон* понимает то, что на современном научном языке называется *количеством движения*[1], в котором принимается в расчет как количество материи, приведенной в движение, так и скорость, с которой она движется.

Под приложенной силой он понимает то, что теперь называют *импульсом*, в котором принято в расчет как время, в продолжение которого действует сила, так и величина силы.

45. Определение равных масс и равных сил. Итак, изложение закона заключает в себе определение равных количеств материи и равных сил.

Мы будем принимать, что возможно сделать так, чтобы сила, с которой одно тело действует на другое, была одинаковой величины в различных случаях.

Это может быть сделано, если мы допустим постоянство свойств тел. Мы знаем, что достаточно растянутая каучуковая нить производит натяжение тем большее, чем больше нить удлинена. Ввиду этого свойства говорят, что нить упруга. Если одну и ту же нить растягивать до одной и той же длины, то, если ее свойства остаются постоянными, она произведет каждый раз то же самое натяжение. Теперь пусть один конец нити прикреплен к телу M, на которое не действует никакая другая сила, кроме натяжения нити, и пусть мы другой конец держим в руке и тянем в постоянном направлении с силой, как раз достаточной для того, чтобы удлинить нить на определенную длину. Сила, действующая на тело, будет тогда иметь некоторую определенную величину F. Тело

[1] *Максвелл* называет эту величину «Momentum». Принимая во внимание, что у нас утвердился термин «Количество движения» мы везде заменили максвелловский термин этим последним. — *Н. А.*

приобретет скорость, и, по прошествии единицы времени, эта скорость будет иметь определенное значение V.

Если ту же самую нить прикрепить к другому телу N и тянуть ее, как в предыдущем случае, так чтобы удлинение было такое же, как и раньше, то сила, действующая на тело, будет та же самая, и если скорость, сообщенная телу N в единицу времени, тоже будет та же самая, именно V, то мы говорим, что оба тела M и N содержат равные количества материи или, на современном языке, имеют *равные массы.* Таким путем с помощью упругого шнурка мы можем подобрать массы ряда тел так, чтобы каждая из них равнялась эталону массы, например, торговому фунту (pound avoirdupois), который является эталоном массы в Британии.

46. Измерение массы. Научное значение динамического метода измерения массы лучше всего видно, если сравнить его с другими методами, находящимися в употреблении.

Пока мы имеем дело с телами совершенно однородными, нетрудно понять, как следует измерять количество материи. Если равные количества вещества производят равные действия всякого рода, то мы можем воспользоваться этими действиями, как мерами количества вещества.

Например, если мы имеем дело с серной кислотой определенной крепости, то мы можем определить количество данной порции ее несколькими различными способами. Мы можем ее взвесить, можем влить ее в градуированный сосуд и измерить таким образом ее объем или можем определить, какое количество раствора поташа определенной концентраций она нейтрализует.

Мы могли бы воспользоваться теми же самыми методами для определения количества азотной кислоты, если бы мы имели дело только с азотной кислотой; но если бы мы пожелали сравнить количество азотной кислоты с количеством серной кислоты, то получили бы различные результаты взвешиванием, измерением объема и испытанием щелочным раствором.

Из этих трех методов метод взвешивания зависит от притяжения между кислотой и землей, способ градуированного сосуда зависит от объема, занимаемого кислотой, а способ титрования зависит от ее сродства к поташу.

Однако в отвлеченной динамике материя рассматривается лишь с той точки зрения, как может изменяться ее скорость под действием

сил. Поэтому какие-нибудь два тела имеют равные массы, если равные силы, будучи приложены к этим телам, производят в равные времена равные изменения скорости. Это единственное определение равных масс, которое может быть допущено в динамике, приложимо ко всем материальным телам, из чего бы они ни были сделаны.

Известно из наблюдений, что тела равных масс, помещенные в одинаковое положение относительно земли, притягиваются к земле одинаковым образом, из чего бы они ни были сделаны; и это не положение отвлеченной динамики, выведенное из аксиоматических принципов, а факт, открытый наблюдением и доказанный тщательными опытами *Ньютона** над временем качания полых деревянных шаров, подвешенных на шнурках одинаковой длины и содержавших золото, серебро, свинец, стекло, песок, обыкновенную соль, дерево, воду и пшеницу.

Как бы то ни было, тот факт, что в одном и том же географическом положении веса равных масс равны, так твердо установлен, что другим способом сравнения масс, кроме способа сравнения их весов, никогда не пользуются, ни в торговле, ни в науке, за исключением исследований, предпринятых со специальной целью определить в абсолютной мере вес единицы массы в различных местах на поверхности земли. Метод, которым пользуются в этих исследованиях, по существу тот же, что у *Ньютона*, а именно, метод измерения длины маятника, отбивающего секунды.

Единица массы в нашей стране определена актом парламента (18 и 19 Викт., гл. 72, июля 30, 1855 г.), как тело из платины, помеченное «P. S., 1844, 1 1b.» и хранящееся в палате казначейства, которое «должно именоваться государственным эталоном торгового фунта (Imperial Standard Pound Avoirdupois)». Одна семитысячная часть этого фунта есть гран. Французский эталон массы есть «Kilogramme des Archives», сделанный *Борда* из платины. Профессор Миллер нашел, что килограмм равен 15432, 34874 гранам.

47. Численное измерение силы. Единица силы есть та сила, которая, действуя на единицу массы в течение единицы времени, производит единицу скорости.

---

*Principia, III. Prop. 6. Действительный вес есть сложный эффект, главную часть которого составляет притяжение, но уменьшенное реакцией против центростремительного ускорения массы, вызванного вращением земли. См. примечание к § 145, помещенное в конце приложения I.

Таким образом, вес грамма, т. е. силу, которая заставляет его падать, можно определить, предоставляя ему свободно падать. По прошествии одной секунды его скорость будет приблизительно 981 сантиметр в секунду, если опыт производится в Британии. Следовательно, вес грамма представляется числом 981, если принять за основные единицы сантиметр, грамм и секунду.

Иногда удобно сравнивать силы с весом тела и говорить о силе во столько-то фунтов или граммов веса. Это называется весовой мерой. Мы должны, однако, помнить, что хотя фунт или грамм — один и тот же во всем мире, но вес фунта или грамма в высоких широтах больше, чем вблизи экватора, а потому измерение силы в весовой мере не имеет никакого научного значения, если не указано, в каком месте земли произведено измерение.

Если, как в Британии, единицами длины, массы и времени служат один фут, один фунт и одна секунда, то единицей силы будет такая сила, которая в одну секунду сообщила бы одному фунту скорость в один фут в секунду. Эта единица силы называется *паундал.*

Во французской метрической системе единицами служат один сантиметр, один грамм и одна секунда. Сила, которая в одну секунду сообщила бы одному грамму скорость в один сантиметр в секунду, называется *диной.*

Так как фут равен 30,4797 сантиметра, а фунт равен 453,59 грамма, то паундал равен 13825, 38 дины.

48. Одновременное действие сил на тело. Пусть теперь единица силы действует в течение единицы времени на единицу массы. Скорость изменится, и ее изменение будет равно единице и направлено одинаково с силою.

Величина и направление этого изменения скорости будут одинаковы, независимо от того, было ли тело первоначально в покое или в движении*; ибо выражение «в покое» не имеет никакого научного смысла, а выражение «в движении», если оно относится к относительному движению, может нечто означать, если же оно относится к абсолютному движению, то оно может относиться лишь к некоторой определенной среде в пространстве. Открыть существование среды и определить нашу скорость относительно нее наблюдением над движением тел есть законная научная проблема, но даже предполагая, что все это сделано, мы бы открыли не ошибку в законах движения, а новый факт в науке.

*Ср. приложение I.

Итак, результат действия на тело данной силы не зависит от движения этого тела.

На него не оказывает также влияния одновременное действие на тело других сил, потому что результат действия этих сил состоит лишь в том, что они вызывают движение тела, а это движение не влияет на изменение скорости, произведенное первой силой.

Итак, мы приходим к следующей форме этого закона. *Если на тело действует несколько сил, то ускорение, вызываемое каждой силой, таково же по направлению и величине, как если бы действие других сил отсутствовало.*

Если на тело действует сила, постоянная по направлению и величине, то изменение скорости пропорционально промежутку времени, в течение которого действует сила.

В самом деле, если сила производит некоторое изменение скорости за данный промежуток времени, то она вызовет равное изменение за следующий промежуток, потому что действие силы не зависит от той скорости, которую имеет тело, когда сила на него действует. Итак, за каждый равный промежуток времени получится равное изменение скорости, и полное изменение скорости от начала движения будет пропорционально времени действия силы.

Изменение скорости за данное время пропорционально силе, потому что, если несколько равных сил действуют по одинаковому направлению на одно и то же тело, каждая производит свое действие независимо от остальных. Следовательно, изменение скорости пропорционально числу равных сил.

49. Об импульсе. Итак, полное действие силы, заключающееся в сообщении телу скорости, пропорционально как силе, так и времени, в течение которого она действует.

Произведение времени действия силы на ее величину, если она постоянна, или на ее среднюю величину, если она переменна, называется *импульсом* силы.

Возможен случай, когда сила действует столь короткое время, что трудно определить как ее величину, так и время, в течение которого она действует. Но сравнительно легко измерить действие силы, заключающееся в изменении движения тела, на которое она действует, каковое изменение зависит от импульса.

Словом «импульс» первоначально пользовались для обозначения действия силы небольшой продолжительности, подобно силе молотка,

вбивающего гвоздь. Нет, однако, существенного различия между этим и всяким другим случаем действия силы. Мы будем пользоваться, поэтому, словом импульс так, как оно определено выше, не ограничивая его применения теми случаями, в которых действие силы весьма кратковременно.

50. Отношение между силой и массой. Если сила действует на единицу массы в течение известного промежутка времени, то импульс измеряется, как мы видели, сообщенной скоростью.

Если несколько равных сил действуют по одному и тому же направлению, каждая на единицу массы, то все эти массы будут двигаться одинаково, и их можно соединить вместе в одно тело, не изменив этим хода явления. Скорость всего тела равна скорости, сообщенной одной из сил, действующей на единицу массы.

Следовательно, сила, требующаяся для того, чтобы произвести данное изменение скорости за данное время, пропорциональна числу единиц массы*, из которых состоит тело.

51. О количестве движения. Численное значение количества движения тела есть произведение числа единиц массы, заключающейся в теле, на число единиц скорости, с которой оно движется. Таким образом, количество движения всякого тела выражается через количество движения единицы массы, движущейся с единицей скорости, которое и принимается за единицу количества движения.

Направление количества движения таково же, как и направление скорости, и подобно тому, как скорость может быть определена лишь по отношению к некоторой точке референции, так и частное значение количества движения зависит от точки референции, которую мы принимаем. Количество движения луны, например, будет весьма различно в зависимости от того, принимаем ли мы землю или солнце за точку референции.

52. Изложение второго закона движения с помощью терминов «импульс» и «количество движения». *Изменение количества движения тела численно равно производящему его импульсу и имеет одинаковое с ним направление.*

---

*Здесь масса скорее означает меру инертности, чем количество материи; при чрезвычайно больших скоростях они не были бы пропорциональны, но были бы связаны законом, включающим скорость, так что количество движения или импульс был бы тогда первоначальной величиной, а инертность — производной.

53. Сложение сил. Если на тело действуют одновременно несколько сил, то каждая сила сообщает ускорение, пропорциональное ее величине (§ 48). Значит, если мы на диаграмме ускорений (§ 34) проведем из любого начала линию, представляющую по направлению и величине ускорение, вызываемое одной из сил, а из конца этой линии другую, представляющую ускорение, сообщаемое другой силой, и т. д., проводя линии для каждой из сил, взятых в любом порядке, то линия, проведенная из начала к концу последней из линий, представит ускорение, сообщенное соединенным действием всех сил.

Так как на этой диаграмме линии, изображающие ускорения, пропорциональны силам, сообщающим эти ускорения, то мы можем рассматривать эти линии как изображения самих сил. Диаграмма, понимаемая таким образом, может быть названа *диаграммой сил*, а линия, проведенная из начала к концу ряда, изображает *равнодействующую силу.*

Представляется важным тот случай, когда ряд линий, изображающих силы, оканчивается в начале, образуя замкнутую фигуру. В этом случае нет равнодействующей силы и нет никакого ускорения. Действия сил в точности уравновешиваются, и мы имеем случай равновесия. Рассмотрение случаев равновесия составляет предмет науки статики.

Коль скоро система сил точно уравновешивается и эквивалентна отсутствию всякой силы*, то очевидно, что силы будут также уравновешиваться, если они будут действовать тем же самым образом на любую другую материальную систему**, какова бы ни была масса этой системы. Это и есть причина того, почему рассмотрение масс не входит в статические исследования.

54. Третий закон движения. *Закон* III. — *Противодействие всегда равно и противоположно действию, то есть действия двух тел друг на друга всегда равны и имеют противоположные направления.*

---

*Исключая, однако, то, что касается деформаций, которые система сил вызывает в деформируемом теле в тех случаях, когда они не действуют все на одну и ту же точку. Лишь в том случае, если на эти деформации не обращается внимания или если тело, на которое они действуют, рассматривается как абсолютно твердое, мы можем говорить о статической эквивалентности двух систем сил.

**Если силы не действуют на одну и ту же точку, то система должна быть твердая, иначе она будет ими деформирована.

Если на тела, между которыми происходит взаимодействие, не действует никакая другая сила, то изменения их относительных количеств движения, произведенные взаимодействием, равны и имеют противоположные направления.

Изменения скоростей обоих тел происходят также в противоположных направлениях, но не равны, за исключением случая равных масс. В других случаях изменения скорости обратно пропорциональны массам.

55. Действие и противодействие представляют различные точки зрения на напряжение. Мы уже пользовались (§ 37) словом «напряжение» (stress) для обозначения взаимодействия между двумя частями материи. Это слово заимствовано из обыденного языка и облечено точным научным значением покойным профессором *Ранкином*, которому мы обязаны многими другими ценными научными терминами.

Коль скоро мы усвоили понятие напряжения, каковым является натяжение веревки или давление между двумя телами, и признали его двойственный характер, так как оно влияет на обе части материи, между которыми оно действует, то нетрудно видеть, что третий закон движения равносилен утверждению, что все силы имеют характер напряжения, что напряжение существует только между двумя частями материи и что его действия на эти части материи (измеряемые количествами движения, сообщенными последним за данное время) равны и противоположны.

Напряжение численно измеряется силой, приложенной к одной из двух частей материи. Различаем между напряжением, как натяжением, если сила, действующая на каждую часть, направлена к другой части, и напряжением, как давлением, если сила, действующая на каждую часть, направлена в сторону, противоположную другой части.

Если сила наклонена к поверхности, отделяющей обе части материи, то напряжение не может быть выражено никакими словами из обыкновенного языка, но должно быть определено в технических математических терминах.

Если натяжение между двумя телами производится при посредстве шнурка, то натяжение, собственно говоря, существует между любыми двумя частями, на которые нить можно представить себе разделенной воображаемым разрезом или поперечным сечением. Если мы, однако, пренебрежем весом шнурка, то каждая часть его будет в рав-

новесии под действием натяжений у его концов, так что натяжения в любых двух поперечных сечениях шнурка должны быть одинаковы. По этой причине мы часто говорим о натяжении шнурка, как целого, не указывая какого-либо особенного его сечения, а также о натяжении между двумя телами без рассмотрения природы шнурка, по которому передается натяжение.

56. Притяжение и отталкивание. Существуют другие случаи, когда два тела, находящиеся на расстоянии, по-видимому, взаимодействуют, хотя мы и не в состоянии открыть какое-нибудь промежуточное тело, подобно шнурку в предыдущем примере, через которое действие передается. Например, два магнита или два наэлектризованных тела, по-видимому, действуют друг на друга, будучи отделены значительными расстояниями; далее, замечено наблюдением, что движения небесных тел испытывают влияния, зависящие от их относительного положения.

Это взаимодействие между отдаленными телами называется притяжением, если оно стремится их сблизить, и отталкиванием, если оно стремится их отдалить.

Однако во всех случаях действие и противодействие между телами равны и противоположны.

57. Третий закон движения справедлив для действия на расстоянии. Тот факт, что магнит притягивает к себе железо, был замечен уже древними, но ими не было обращено никакого внимания на силу, с которой железо притягивает магнит. *Ньютон* же, помещая магнит в одном сосуде, а железо в другом и заставляя оба сосуда плавать по воде так, чтобы они соприкасались, показал на опыте, что так как ни один из сосудов не был в состоянии двигать другой вместе с собой вперед по воде, то притяжение железа магнитом должно быть равно и противоположно притяжению магнита железом, и каждое из них равно давлению между двумя сосудами.

Дав эту экспериментальную иллюстрацию, *Ньютон* переходит к указанию на следствие отрицания истинности этого закона. Например, если притяжение какой-либо частью земли, скажем, горой, остальной части земли было бы больше или меньше притяжения горы остальной частью земли, то существовала бы остаточная сила, действующая на систему земли–горы, как целое, которая заставила бы ее удаляться со все возрастающей скоростью в бесконечном пространстве.

58. Доказательство Ньютона не экспериментально. Это противоречит первому закону движения, который утверждает, что тело не изменяет своего состояния движения, если на него не действует *внешняя сила.* Нельзя утверждать, что это противоречит опыту, потому что действие неравенства между притяжениями землей горы и горой земли было бы одинаково с действием силы, равной разности этих притяжений и действующей по направлению линии, соединяющей центр земли с горой.

Если бы гора находилась на экваторе, то земля должна была бы вращаться около оси, параллельной той оси, около которой она бы вращалась в противном случае, но не проходящей точно через центр массы Земли*.

Если бы гора находилась на одном из полюсов, то постоянная сила, параллельная земной оси, заставила бы орбиту Земли около Солнца медленно переноситься к северу или югу от плоскости, проходящей через центр массы Солнца.

Если бы гора находилась в каком-нибудь другом месте земной поверхности, то ее действие было бы отчасти одного, отчасти другого рода.

Ни один из этих эффектов, если они не очень велики, не мог бы быть обнаружен непосредственными астрономическими наблюдениями, а косвенный метод обнаружения малых сил по их действию, выражающемуся в медленном изменении элементов орбиты планеты, предполагает, что известна справедливость закона тяготения. Доказывать законы движения посредством закона тяготения было бы обращением научного порядка. Это было бы все равно, что доказывать правило сложения чисел посредством дифференциального исчисления.

Нельзя поэтому рассматривать ньютоново рассуждение как ссылку на опыт и наблюдение, но, скорее, как вывод третьего закона движения из первого.

---

*Это потому, что такая остаточная сила вращалась бы вместе с суточным движением Земли. Если F есть эта сила, E — масса Земли, а ω — ее угловая скорость, то измененная ось вращения проходила бы на таком расстоянии R от центра массы, что $F = E\omega^2 R$.

В следующем предположении направление остаточной силы постоянно, а так как Земля удерживается в орбите вокруг Солнца силой тяготения, то эта сила передается солнечной системе, как целому, к которой, следовательно, а не к одной лишь Земле, и следует применить заключительное положение § 57.

Глава 4

О свойствах центра массы материальной системы

59. Определение вектора-массы. Мы видели, что вектор представляет операцию перенесения чертящей точки из данного начала в данную точку.

Определим *вектор-массу*, как операцию перенесения данной массы из данного начала в данную точку. Направление вектора-массы таково же, как и направление вектора этой массы, но его величина есть произведение массы на вектор этой массы. Так, если $\overline{OA}$ есть вектор массы A, то вектор-масса есть $\overline{OA} \cdot A$.

60. Центр массы двух частиц. Если A и B — две массы, и если взять точку C на прямой линии $\overline{AB}$ так, чтобы $\overline{BC}$ относилось к $\overline{CA}$ как A к b, то вектор-масса массы $A + B$, помещенной в точке C, равен сумме векторов-масс частиц A и B. Ибо

$$\overline{OA}\cdot A+\overline{OB}\cdot B = (\overline{OC}+\overline{CA})A+(\overline{OC}+\overline{CB})B = \overline{OC}(A+B)+\overline{CA}\cdot A+\overline{CB}\cdot B.$$

Но векторы-массы $\overline{CA} \cdot A$ и $\overline{CB} \cdot B$ равны и противоположны, так что

$$\overline{OA} \cdot A + \overline{OB} \cdot B = \overline{OC}(A + B),$$

т. е. C есть такая точка, что если бы массы частиц A и B были сосредоточены в точке C, то их вектор-масса из любого начала O был бы тот же самый, как если бы массы A и B находились в их действительных положениях. Точка C называется *центром массы* частиц A и B.

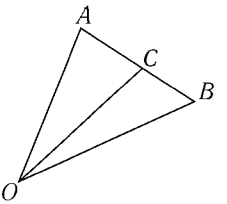


Рис. 7

61. Центр массы системы. Если система состоит из нескольких частиц, то мы можем определить сначала центр массы любых двух частиц и заменить эти две частицы частицей, равной их сумме и помещенной в их центре массы. Затем мы можем определить центр массы этой частицы вместе с третьей частицей системы и поместить в этой точке сумму масс трех частиц и т. д. до тех пор, пока не найдем центр массы всей системы.

Вектор-масса, проведенный из любого начала к массе, равной массе всей системы и помещенной в центре массы системы, равен сумме векторов-масс, проведенных из того же начала ко всем частицам системы.

Из доказательства § 60 следует, что точка, найденная данным здесь построением, этому условию удовлетворяет. Из самого условия ясно, что ему может удовлетворять только одна точка. Поэтому построение должно приводить к одинаковому результату относительно положения центра массы, в каком бы мы порядке ни брали частицы системы.

Следовательно, центр массы есть определенная точка на диаграмме конфигурации системы. Приписывая различным точкам на диаграммах перемещения, скорости, изменения скорости и ускорения массы тел, которым они соответствуют, мы можем найти на каждой из этих диаграмм точку, соответствующую центру массы и показывающую перемещение, скорость, изменение скорости или ускорение центра массы.

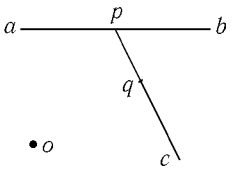


Рис. 8

62. Вектор количества движения, как быстрота изменения вектора-массы. Если точки o, a, b, c на диаграмме скоростей соответствуют скоростям начала O и тел A, B и C и если точка p есть центр масс A и B, помещенных в точках a и b, а q есть центр массы $A+B$, помещенной в p, и массы C, помещенной в c, то q будет центр массы системы тел A, B и C, помещенных, соответственно, в точках a, b и c.

Скорость тела A относительно O указывается вектором $\overline{oa}$, а скорость тел B и C — векторами $\overline{ob}$ и $\overline{oc}$; $\overline{op}$ есть скорость центра массы тел A и B, а $\overline{oq}$ — скорость центра массы тел A, B и C относительно начала O.

Количество движения тела A относительно O есть произведение скорости на массу, или $\overline{oa}\cdot A$, т. е. то, что мы назвали уже вектором-массой, проведенным из точки o к массе A, помещенной в a. Подобно этому количество движения всякого другого тела есть вектор-масса, проведенный из начала o к той точке на диаграмме скоростей, которая соответствует этому телу, а количество движения массы системы, сосредоточенной в центре масс, есть вектор-масса, проведенный из начала o к полной массе, помещенной в q.

Так как, следовательно, вектор-масса на диаграмме скоростей есть то, что мы уже определили как вектор количества движения, мы мо-

жем изложить доказанное в § 61 свойство следующим образом: количество движения массы, равной массе всей системы, движущейся со скоростью центра массы системы, равно по величине и параллельно по направлению сумме количеств движения всех частиц системы.

63. Влияние внешних сил на движение центра массы. Точно таким же образом, на диаграмме полных ускорений (т. е. изменений скорости) векторы $\overline{\omega\alpha}$, $\overline{\omega\beta}$ и т. д., проведенные из начала, представляют изменение скорости тел A, B и т. д. в течение известного промежутка времени. Соответствующие векторы-массы $\overline{\omega\alpha}\cdot A$, $\overline{\omega\beta}\cdot B$ и т. д. представляют соответствующее изменение количества движения или, по второму закону движения, импульсы сил, действующих на эти тела в течение этого промежутка времени. Если $\varkappa$ есть центр массы системы, то $\overline{\omega\varkappa}$ есть изменение его скорости в течение промежутка, $\overline{\omega\varkappa}(A+B+C)$ есть количество движения, сообщенное массе, сосредоточенной в центре тяжести. Отсюда по § 61 изменение количества движения воображаемой массы, равной массе всей системы и сосредоточенной в центре массы, равно сумме изменений количеств движения всех различных тел системы.

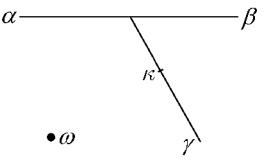


Рис. 9

В силу второго закона движения мы можем изложить этот результат в следующей форме:

Влияние сил, действующих на различные тела системы, в смысле изменения движения центра массы системы, таково же, как если бы все эти силы были приложены к массе, равной полной массе системы и совпадающей с ее центром массы.

64. Движение центра массы системы не зависит от взаимодействия между ее частями. Ибо если существует взаимодействие между частями A и B системы, то действие A на B, по третьему закону движения, всегда равно и противоположно противодействию B на A. Количество движения, сообщенное части B действием A в течение какого-либо промежутка, равно и противоположно количеству движения, сообщенному части A противодействием B в течение того же промежутка, и, следовательно, на движение центра масс A и B их взаимодействие не влияет.

Мы можем применить результат предыдущего параграфа и сказать, что так как силы, действующие на A и B и возникающие из их

взаимодействия, равны и противоположны, и так как влияние этих сил на движение центра массы системы таково же, как если бы они были приложены к частице, масса которой равна полной массе системы, а действие двух сил, равных и противоположных друг другу, есть нуль, то движение центра массы не испытает изменения.

65. Первый и второй законы движения. Это очень важный результат. Он дает нам возможность сделать более точным изложение первого и второго законов движения, определяя, что под скоростью тела разумеется скорость его центра массы. Тело может вращаться или состоять из частей и быть способно к изменению конфигурации, так что движение разных частей может быть различно, но мы можем все же утверждать справедливость законов движения в следующей форме:

Закон I. — Центр масс системы продолжает сохранять свое состояние покоя или равномерного движения по прямой линии, пока его не заставят изменить это состояние силы, действующие на систему извне.

Закон II. — Изменение количества движения* системы в течение любого промежутка времени измеряется суммой импульсов внешних сил в течение этого промежутка.

66. Способ рассмотрения систем молекул. Если система состоит из частей, столь малых, что мы их не можем наблюдать, и движения которых так быстры и так изменчивы, что даже если бы мы могли их наблюдать, то не могли бы их описать, мы тем не менее в состоянии рассматривать движение центра массы системы, ибо внутренние силы, вызывающие изменчивость движения частей, не влияют на движение центра.

67. Введением понятия о массе мы переходим от векторов точек, перемещений точек, скоростей, их изменений и ускорений к векторам-массам, массам-перемещениям, количествам движения, импульсам и движущим силам. На диаграмме ускорения (рис. 9, § 63) векторы $\overline{\omega\alpha}$, $\overline{\omega\beta}$ и т. д., проведенные из начала, изображают ускорения тел A, B и т. д. в данный момент, по отношению к ускорению начала O.

Соответствующие векторы-массы $\overline{\omega\alpha} \cdot A$, $\overline{\omega\beta} \cdot B$ и т. д. изображают силы, действующие на тела A, B и т. д.

---

*В настоящем предложении подразумевается количество поступательного движения, отличное от количества вращательного движения. Ср. § 69. В расширенном смысле закон годится для обоих вместе. Ср. § 70.

Иногда мы говорим о нескольких силах, действующих на тело, если действующая на тело сила возникает из нескольких различных причин, так что естественно рассматривать в отдельности части силы, возникающие вследствие этих различных причин. Если же мы рассматриваем силу не с точки зрения ее причин, но по отношению к ее эффекту, состоящему в изменении движения тела, то мы говорим не о силах, а о силе, действующей на тело, и сила эта измеряется быстротой изменения количества движения тела и изображается вектором-массой на диаграмме ускорения*.

Таким образом, мы имеем ряд различного рода векторов-масс, соответствующих ряду уже рассмотренных нами векторов.

Во-первых, мы имеем систему векторов-масс с общим началом, на которые можем смотреть, как на способ изображения распределения массы в материальной системе подобно тому, как соответствующая система векторов изображает геометрическую конфигурацию системы.

Во-вторых, сравнивая распределение массы в два различных момента времени, мы получаем систему векторов-масс перемещения.

Быстрота массы-перемещения есть количество движения, подобно тому, как быстрота перемещения есть скорость.

Изменение количества движения за некоторое время есть импульс, что соответствует изменению скорости.

Быстрота изменения количества движения есть движущая сила, как быстрота изменения скорости есть ускорение.

---

*Это различие удачно выражается терминами *приложенные силы и эффективные* (*деятельные*) *силы.* Для отдельной частицы эти две системы сил статически эквивалентны. Поэтому для всякого тела, которое можно рассматривать как систему частиц, удерживаемых вместе их взаимодействиями, должно быть справедливо то же самое для их совокупности, если их взаимодействия также включены в число приложенных сил. Но эти внутренние силы должны иметь в каждом случае как раз такие величины, чтобы они статически взаимно уравновешивались, ибо, в противном случае, части тела получили бы непрерывно ускоренное движение, даже в том случае, если оно изолировано от всех внешних влияний. Следовательно, если исключить из рассмотрения внутренние силы, то силы, приложенные извне, статически эквивалентны, *поскольку дело касается* тела данного типа, эффективным силам, ускоряющим частицы или элементы массы этого тела. Это — начало *д'Аламбера*; хотя оно и заключается в ньютоновой схеме, будучи предусмотрено третьим законом, но его более ясная формулировка, данная в 1743 году, привела к большому упрощению в рассмотрении запутанных динамических вопросов путем сведения их к задачам статики, пример чего представляет принадлежащее *д'Аламберу* исследование колебания земной оси, вызывающего предварение равноденствий.

68. Определение массы-площади. Если материальная частица движется от одной точки к другой, то удвоенная площадь, описанная вектором частицы, помноженная на массу частицы, называется массой-площадью перемещения частицы относительно начала, из которого проведен вектор.

Если площадь умещается в одной плоскости, то направление массы-площади нормально к этой плоскости и проведено таким образом, что если смотреть по положительному направлению нормали, то движение частицы вокруг начальной точки кажется происходящим по направлению движения часовой стрелки*.

Если площадь не умещается в одной плоскости, то траектория частицы должна быть разделена на части, столь малые, что каждая из них кажется совпадающей с прямой линией, и массы-площади, соответствующие этим частям, должны быть сложены по правилу сложения векторов.

69. Момент количества движения[1]**.** Быстрота изменения массы-площади есть удвоенное произведение массы частицы на площадь треугольника, вершина которого находится в начале, а основание есть скорость частицы, измеряемая вдоль линии, проходящей через частицу по направлению ее движения. Направление этой массы-площади указывается нормалью, проведенной согласно данному выше правилу.

Быстрота изменения массы-площади частицы называется моментом количества движения частицы около начала, сумма же этих моментов всех частиц называется моментом количества движения системы около начала.

Момент количества движения материальной системы относительно точки есть, следовательно, величина, имеющая как определенное направление, так и определенный размер.

Определение момента количества движения частицы около точки может быть дано несколько иначе, как произведение количества движения частицы относительно этой точки на перпендикуляр, опущенный из этой точки на направление движения частицы в этот момент времени.

---

*Если пользоваться абсолютными терминами, движение вокруг площади происходит по направлению правовращающего винтового движения, в котором поступательное перемещение происходит вдоль нормали по ее положительному направлению.

[1] У Максвелла: angular momentum. — *Н. А.*

70. Момент силы около точки. Быстрота возрастания момента количества движения частицы есть произведение ускорения частицы на ее массу и на перпендикуляр, опущенный из начала на линию, проходящую через частицу по направлению ускорения; другими словами, произведение движущей силы, действующей на частицу, на перпендикуляр, опущенный из начала на линию действия этой силы.

Произведение силы на перпендикуляр, опущенный из начала на линию ее действия, называется *моментом силы около начала.* Этот момент есть вектор, проведенный перпендикулярно плоскости, проходящей через силу и начало и по такому направлению, что если смотреть вдоль этой линии по направлению, по которому она проведена, то сила стремится двигать частицу вокруг начала по направлению часовой стрелки.

Отсюда следует, что быстрота изменения момента количества движения частицы около начала измеряется моментом около той же точки силы, действующей на частицу.

Быстрота изменения момента количества движения материальной системы около начала измеряется подобным же образом геометрической суммой моментов сил, действующих на частицы этой системы.

71. Сохранение момента количества движения. Рассмотрим теперь любые две частицы системы. Силы, действующие на эти две частицы и возникающие из их взаимодействия, равны, противоположны и действуют по одной и той же прямой линии. Отсюда следует, что моменты этих сил около любой точки, как начала, равны, противоположны и расположены на одной и той же прямой. Значит, сумма этих моментов есть нуль. Подобным же образом взаимодействие между всякой другой парой частиц системы состоит из двух сил, сумма моментов которых есть нуль.

Итак, взаимодействие между телами материальной системы не влияет на геометрическую сумму моментов сил. Поэтому единственные силы, которые нужно рассматривать при определении геометрической суммы моментов, это силы внешние по отношению к системе, то есть силы, действующие между всей системой или какой-либо частью ее и телами, не включенными в систему.

Следовательно, быстрота изменения момента количества движения системы измеряется геометрической суммой моментов внешних сил, действующих на систему.

Если направления всех внешних сил проходят через начало, то их моменты равны нулю и момент количества движения системы останется постоянным.

Если планета описывает орбиту около солнца, то направление взаимодействия между обоими телами проходит через их общий центр масс. Значит, момент количества движения каждого тела около их общего центра масс остается постоянным, пока рассматриваются только эти два тела, хотя на него может влиять действие других планет. Однако же, если мы включим в систему все планеты, то геометрическая сумма моментов их количеств движения около их общего центра масс будет оставаться постоянной*, каковы бы ни были их взаимодействия, при условии, что никакая сила, исходящая из тел, внешних по отношению к солнечной системе, не действует неодинаковым образом на различные члены этой системы.

*То есть плоскость полного момента количества движения солнечной системы сохраняет неизменное направление в пространстве.

Плоскость этого результирующего момента, названная *Лапласом* «неизменяемой плоскостью», имеет основное значение для определения движения солнечной системы.

Глава 5
О работе и энергии

72. Определения. ***Работа**** *есть действие, приводящее к изменению конфигурации в системе и производимое против силы, сопротивляющейся этому изменению.*

Энергия *есть способность произвести работу.*

Если природа материальной системы такова, что всякий раз, как система, подвергшись ряду изменений, возвращается каким-либо образом к своему первоначальному состоянию, полная работа, произведенная внешними деятелями над системой, равна полной работе, потраченной системой на преодоление внешних сил, то система называется ***консервативной системой*****.

73. Закон сохранения энергии. Прогресс физических наук привел к открытию и исследованию различных форм энергии и к установке положения, что все материальные системы можно рассматривать как консервативные, *при условии*, что приняты в расчет все различные формы энергии, существующие в этих системах.

Это положение, рассматриваемое как вывод из наблюдения и опыта, утверждает, конечно, только то, что доселе не было открыто ни одного примера неконсервативной системы. Как научное, плодотворное положение, оно приобретает, однако, все большую вероятность вследствие постоянно возрастающего числа сделанных из него выводов, которые во всех случаях оправдались на опыте.

Действительно, учение о сохранении энергии есть единственное общее положение, которое оказалось в согласии с опытом не в одной лишь физике, но и во всех физических науках.

Будучи принято, оно доставляет физику-исследователю принцип, из которого он может вывести любой известный закон, относящийся

---

*Произведенная работа есть количественная мера усилия, затраченного на изменения расположения системы, выраженная через расход энергии, требующейся для этого эффекта.

Понятие работы подразумевает запас энергии, из которого черпается работа.

**В отличие от системы, в которой ценная энергия благодаря влиянию трения постепенно превращается в менее ценные формы, называемой *рассеивающей системой*. Ср. § 93.

к физическим явлениям, и который дает ему возможность открывать отношения между такими явлениями в новых отраслях науки*.

По этой причине указанное положение обыкновенно называют законом сохранения энергии.

74. Общее изложение закона сохранения энергии. *Полная энергия всякой материальной системы есть величина, которой не может ни увеличить, ни уменьшить никакое взаимодействие между частями системы, хотя она может быть превращена в любую из форм, которые энергия способна принять.*

Если под действием внешнего по отношению к системе агента изменяется конфигурация системы, причем силы системы сопротивляются этому изменению конфигурации, то говорят что внешний агент производит над системой работу. В этом случае энергия системы увеличивается на количество работы, произведенной над нею внешним агентом.

Если, наоборот, силы системы производят изменение конфигурации, которому противодействует внешний агент, то говорят, что система совершает над внешним агентом работу, и энергия системы уменьшается на величину работы, которую она совершает.

Следовательно, работа есть перевод энергии из одной системы в другую; система, расходующая энергию, совершает работу над системой, ее получающей, и количество энергии, израсходованной первой системой, всегда в точности равно количеству энергии, приобретенной второй.

Если мы соединим обе системы в одну большую систему, то энергия полной системы не увеличивается и не уменьшается вследствие взаимодействия между двумя частными системами.

75. Измерение работы. Работу, совершенную внешним агентом над материальной системой, можно определить как изменение в конфигурации системы, происходящее под действием внешней силы, стремящейся произвести это изменение.

Так, если человек поднимает один фунт на один фут от земли против силы тяжести, то им совершено определенное количество работы, известное у инженеров под названием фунто-фута.

---

*Всякий закон, относящийся к силам статической или неподвижной системы, неявно содержится в полном выражении для энергии системы. Но в кинетической системе, где сила применяется для производства энергии движения, требуется другой принцип, например, принцип наименьшего действия. См. *ниже*, гл. IX.

В этом случае человек есть внешний агент, материальная система состоит из земли и фунта, изменение конфигурации есть увеличение расстояния между материей земли и материей фунта, а силой является направленная вверх сила, приложенная человеком для поднятия фунта, равная и противоположная весу фунта. Для того чтобы поднять фунт еще на фут выше, если бы тяжесть была постоянной силой, потребовалось бы точно такое же количество работы. На самом деле, сила тяжести уменьшается с поднятием над поверхностью земли, так что фунто-фут не есть точно известная величина, если мы не определим напряжение силы тяжести в данном месте. Однако же для цели иллюстрации мы можем принять, что сила тяжести постоянна для небольшого числа футов подъема, и в таком случае работа, произведенная при поднятии фунта, была бы один фунто-фут на каждый фут поднятия.

Для того чтобы поднять двадцать фунтов воды на высоту десяти футов, требуется 200 фунто-футов работы. Чтобы поднять один фунт на высоту десяти футов, требуется десять фунто-футов, а так как имеется двадцать фунтов, то вся работа в двадцать раз больше, составляя двести фунто-футов.

Следовательно, количество работы пропорционально произведению чисел, представляющих приложенную силу и перемещение по направлению силы.

Если работа равна фунто-футу, то силой является вес фунта — величина, как известно, различная в различных местах. Вес фунта, выраженный в абсолютной мере, численно равен напряжению силы тяжести, величине, обозначаемой через g, значение которой в паундалах на фунт меняется от 32,227 на полюсах до 32,117 на экваторе и беспредельно уменьшается по мере удаления от земли. Выраженная в динах на грамм, она меняется от 978,1 до 983,1. Итак, для того чтобы выразить работу однообразным и согласным способом, мы должны помножить число фунто-футов на число, представляющее напряжение силы тяжести в данном месте. Работа выражается таким образом в паундал-футах. Мы будем всегда подразумевать, что работа измерена таким способом и выражена в паундал-футах, если не указана никакая другая система измерения. Если работа выражена в фунто-футах, то имеем систему *весовых мер*, причем эта система неполна, если мы не знаем также напряжения силы тяжести в данном месте.

В метрической системе единицей работы служит *эрг*, или работа, произведенная диной, действующей на протяжении сантиметра. В паундал-футе содержится 421393,8 эргов.

76. Потенциальная энергия. Работа, совершенная человеком при поднятии тяжелого тела, затрачена на преодоление притяжения между землей и этим телом. Энергия материальной системы, состоящей из земли и тяжелого тела, при этом возрастает. Если тяжелым телом является свинцовая гиря стенных часов, то энергия часов возрастает при ее поднятии, так что часы могут идти в течение недели, несмотря на трение колес и сопротивление воздуха движению маятника, и еще расходовать энергию в других формах, как, например, сообщение воздуху колебаний, благодаря которым мы слышим тиканье часов.

Когда человек заводит карманные часы, он затрачивает работу на изменение формы пружины, скручивая ее. Энергия пружины при этом возрастает, так что, раскручиваясь, она в состоянии поддерживать ход часов.

В обоих этих случаях энергия, сообщенная системе, зависит от изменения ее конфигурации.

77. Кинетическая энергия. Однако в очень важном классе явлений работа затрачивается на изменение скорости тела, над которым она совершается. В качестве простого примера возьмем тело, движущееся без вращения под действием силы. Пусть масса тела M фунтов и пусть сила в F паундалов действует на него по направлению движения в течение промежутка времени в T секунд. Пусть скорость в начале промежутка составляет V, а в конце его V' футов в секунду, и пусть расстояние, пройденное телом в течение этого времени, есть S футов. Начальное количество движения есть MV, а конечное MV', так что приращение момента есть $M(V' - V)$, и по второму закону движения оно равно FT, *импульсу* силы F за время T.

Отсюда:

$$FT = M(V' - V). \tag{1}$$

Так как скорость возрастает равномерно со временем (когда сила постоянна), то средняя скорость есть среднее арифметическое начальной и конечной скоростей, или $\frac{1}{2}(V' + V)$.

Мы можем определить также среднюю скорость делением пространства S на время T, в течение которого оно пройдено.

Отсюда:

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{2}(V' + V). \tag{2}$$

Перемножая соответствующие члены уравнений (1) и (2), получаем:

$$FS = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2. \tag{3}$$

Здесь FS есть работа, произведенная силой F, действующей на тело за время, в течение которого оно проходит пространство S по направлению силы, и эта работа равна избытку $\frac{1}{2}MV'^2$ над $\frac{1}{2}MV^2$. Если назовем $\frac{1}{2}MV^2$, или половину произведения массы на квадрат скорости, *кинетической энергией* тела в начале, то $\frac{1}{2}MV'^2$ будет кинетической энергией после действия силы F на протяжении пути S. Энергия выражена здесь в паундал-футах.

Теперь мы можем выразить уравнение словами следующим образом: Работа, затраченная силой F на изменение движения тела, измеряется приращением кинетической энергии тела за время действия силы.

Мы доказали, что это верно, если промежуток времени так мал, что мы можем считать силу постоянной в течение этого времени, а среднюю скорость в течение этого промежутка за среднюю арифметическую скоростей в начале и в конце промежутка. Это предположение, которое в точности справедливо, если сила постоянна, как бы велик ни был промежуток, становится, в общем случае, верным со всевозрастающим приближением, когда взятый промежуток времени делается все меньше и меньше. Разделив все время действия на малые части и доказав, что в течение каждой из этих частей произведенная работа равна приращению кинетической энергии тела, мы можем, складывая последовательные части работы и последовательные приращения энергии, прийти к тому результату, что полная работа, произведенная силой, равна полному приращению кинетической энергии.

Если сила действует на тело по направлению, противоположному его движению, то кинетическая энергия тела будет убывать, вместо того чтобы возрастать, и сила, вместо того чтобы производить над телом работу, будет действовать как сопротивление, которое тело преодолевает в своем движении. Отсюда вытекает, что движущееся тело, покамест

оно в движении, может совершать работу, преодолевая сопротивление, и работа, произведенная движущимся телом, равна убыли его кинетической энергии, пока, наконец, когда тело придет в состояние покоя, его кинетическая энергия не будет исчерпана, и вся произведенная им работа будет тогда равна полной кинетической энергии, которою оно обладало вначале.

Теперь мы видим, насколько подходит название *кинетическая энергия*, которым мы до сих пор пользовались просто как наименованием для обозначения произведения $\frac{1}{2}MV^2$. Ведь энергия тела была определена как способность его к совершению работы, и измеряется она работой, которую тело может произвести. *Кинетическая* энергия тела есть энергия, которой оно обладает в силу своего *движения*, и мы только что показали, что ее значение выражается через $\frac{1}{2}MV^2$ или $\frac{1}{2}MV \cdot V$, то есть половиной произведения его момента на скорость.

78. Силы, действующие под острым углом к направлению движения. Если сила действует на тело под прямым углом к направлению его движения, то она не совершает работы над телом и изменяет направление, но не величину скорости. Следовательно, кинетическая энергия, зависящая от квадрата скорости, остается неизменной.

Если направление силы не совпадает с направлением движения тела и не перпендикулярно к нему, то мы можем разложить силу на две слагающие, одну под прямым углом к направлению движения, а другую по направлению движения (или по противоположному направлению).

Первая из этих слагающих может быть оставлена без рассмотрения во всех вычислениях, касающихся энергии, так как она не совершает работы над телом и не изменяет его кинетической энергии.

Вторая слагающая есть та, которую мы уже рассмотрели. Если она имеет направление движения, то она увеличивает кинетическую энергию тела на величину работы, произведенной ею над телом. Если она имеет противоположное направление, то кинетическая энергия тела уменьшается на величину работы, произведенной телом против силы.

Итак, во всех случаях приращение кинетической энергии равно работе, совершенной над телом внешним агентом, а убыль кинетической энергии равна работе, совершенной телом против внешнего сопротивления.

79. Кинетическая энергия двух частиц, отнесенных к их центру массы. Кинетическая энергия материальной системы равна кинетической энергии массы, равной массе системы и движущейся со скоростью центра массы системы, сложенной с кинетической энергией движения частей системы относительно ее центра массы.

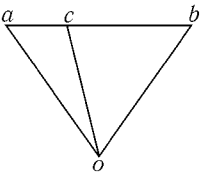


Рис. 10

Начнем со случая двух частиц, массы которых A и B, а скорости представлены на диаграмме скоростей линиями $\overline{oa}$ и $\overline{ob}$. Если c есть центр масс частицы с массой A, помещенной в точке a, и частицы с массой B, помещенной в точке b, то $\overline{oc}$ представит скорость центра масс двух частиц.

Кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий частиц, или

$$T = \frac{1}{2}A \cdot \overline{oa}^2 + \frac{1}{2}B \cdot \overline{ob}^2.$$

Выразив $\overline{oa}^2$ и $\overline{ob}^2$ через $\overline{oc}$, $\overline{ca}$ и $\overline{cb}$ и угол $oca = \theta$, получим:

$$T = \frac{1}{2}A\cdot\overline{oc}^2 + \frac{1}{2}A\cdot\overline{ca}^2 - A\cdot\overline{oc}\cdot\overline{ca}\cdot\cos\theta + \frac{1}{2}B\cdot\overline{oc}^2 + \frac{1}{2}B\cdot\overline{cb}^2 - B\cdot\overline{oc}\cdot\overline{cb}\cdot\cos\theta.$$

Но так как c есть центр массы A, помещенной в точке a, и массы B, помещенной в точке b, то

$$A \cdot \overline{ca} + B \cdot \overline{cb} = 0.$$

Отсюда, складывая, имеем:

$$T = \frac{1}{2}(A + B)\overline{oc}^2 + \frac{1}{2}A \cdot \overline{ca}^2 + \frac{1}{2}B \cdot \overline{cb}^2,$$

то есть кинетическая энергия системы двух частиц A и B равна кинетической энергии массы, равной $(A + B)$, движущейся со скоростью центра массы, сложенной с кинетической энергией движения частиц относительно центра массы.

80. Кинетическая энергия материальной системы, отнесенной к ее центру массы. Мы начали со случая двух частиц, так как очевидно, что движение частицы есть движение ее центра массы, и доказали справедливость нашего предложения для системы из двух

частиц. Но если предложение справедливо для каждой из двух материальных систем, взятых порознь, то оно должно быть справедливо для системы, которую они вместе образуют. В самом деле, если мы предположим, что векторы $\overline{oa}$ и $\overline{ob}$ изображают скорости центров масс двух материальных систем A и B, то $\overline{oc}$ изобразит скорость центра масс соединенной системы $A+B$, и если T_A представляет кинетическую энергию движения системы A относительно ее собственного центра масс, а T_B — то же самое для системы B, тогда, если предложение справедливо для систем A и B, взятых в отдельности, кинетическая энергия системы A есть

$$\frac{1}{2}A\cdot\overline{oa}^2+T_A,$$

а кинетическая энергия системы B

$$\frac{1}{2}B\cdot\overline{ob}^2+T_B.$$

Следовательно, кинетическая энергия соединенной системы равна

$$\frac{1}{2}A\cdot\overline{oa}^2+\frac{1}{2}B\cdot\overline{ob}^2+T_A+T_B$$

или

$$\frac{1}{2}(A+B)\overline{oc}^2+\frac{1}{2}A\cdot\overline{ca}^2+T_A+\frac{1}{2}B\cdot\overline{cb}^2+T_B.$$

Первый член представляет кинетическую энергию массы, равной массе всей системы, движущейся со скоростью центра массы всей системы.

Второй и третий члены, вместе взятые, представляют кинетическую энергию системы A относительно центра тяжести всей системы, а четвертый и пятый члены представляют то же самое для системы B.

Итак, если предложение справедливо для двух систем A и B, взятых в отдельности, то оно справедливо и для системы, составленной из A и B. Но мы доказали, что оно справедливо для случая двух частиц; значит оно справедливо для трех, четырех или любого другого числа частиц, а следовательно, и для всякой материальной системы.

Кинетическая энергия системы, отнесенной к ее центру массы, меньше ее кинетической энергии относительно всякой другой точки.

В самом деле, последняя величина превосходит первую на величину, равную кинетической энергии массы, равной массе всей системы, движущейся со скоростью центра массы относительно этой другой точки, а так как кинетическая энергия есть величина существенно положительная, избыток должен быть положителен.

81. Полезная кинетическая энергия. Мы видели уже в § 64, что взаимодействие между частями материальной системы не может изменить скорость центра массы системы. Следовательно, на ту часть кинетической энергии системы, которая зависит от движения центра массы, не может оказывать влияния никакое внутреннее действие системы. Поэтому невозможно превратить эту часть энергии в работу посредством взаимодействия частей системы. Пока система рассматривается сама по себе, эта энергия бесполезна. Она может быть превращена в работу только посредством взаимодействия между этой системой и какой-нибудь другой материальной системой, внешней по отношению к ней.

Итак, если будем рассматривать материальную систему, не связанную с какой-нибудь другой системой, то ее полезная кинетическая энергия есть энергия движений частей системы относительно ее центра массы.

Предположим, что взаимодействие между частями системы таково, что через некоторое время конфигурация системы становится неизменяемой; назовем этот процесс отвердеванием системы. Мы показали, что момент количества движения всей системы не изменяется ни от какого взаимодействия ее частей. Следовательно, если начальный момент количества движения есть нуль, то система, когда ее форма сделается неизменяемой, не будет вращаться около своего центра массы; но если она все же движется, то будет двигаться параллельно самой себе, и части ее будут в покое относительно центра массы. Значит, в этом случае, вся полезная энергия будет превращена в работу взаимодействием частей в продолжение отвердевания системы.

Если момент количества движения системы не нуль, то она будет иметь тот же самый момент после отвердения. Она будет вращаться около своего центра масс, а потому будет еще обладать некоторой остаточной энергией движения относительно этого последнего, не превращенной в работу.

Но если частям системы предоставлена возможность удаляться друг от друга по направлениям, перпендикулярным к оси момента количества движения системы, и если система, расширившись таким образом, отвердевает, то остающаяся кинетическая энергия вращения будет тем меньше, чем больше расширение системы, так что, в достаточной мере расширяя систему [прежде чем она отвердеет], мы можем сделать остающуюся кинетическую энергию сколь угодно малой; таким

образом, вся кинетическая энергия относительно центра массы системы может быть превращена в работу внутри системы.

82. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия системы есть ее способность к совершению работы [над другими системами], зависящая от обстоятельств, отличных от движения системы. Другими словами, потенциальная энергия — это та энергия, которая не является кинетической.

В теоретической материальной системе, которую мы строим в нашем воображении из основных понятий материи и движения, не существует других условий, кроме конфигурации и движения различных масс, из которых состоит система. Значит, в такой системе обстоятельствами, от которых должна зависеть энергия, являются только движение и конфигурация; а так как кинетическая энергия зависит от движения, то потенциальная энергия должна зависеть от конфигурации.

Мы знаем, что во многих действительных материальных системах часть энергии зависит от конфигурации. Так, часовая пружина имеет больше энергии, когда она свернута, чем тогда, когда она частично развернута, а два магнитных бруска, помещенные рядом, имеют больше энергии, если их одноименные полюсы обращены в одну и ту же сторону, чем в том случае, если они сложены разноименными полюсами.

83. Упругость. На примере пружины мы можем проследить связь между свертыванием пружины и силой, которую юна после этого обнаруживает, представляя себе пружину разделенной (в воображении) на весьма малые части или элементы. Когда пружину свертывают, форма каждой из этих малых частей изменяется, и такое изменение формы твердого тела называется *деформацией*.

В твердых телах деформация сопровождается внутренней силой или напряжением; те тела, в которых напряжение зависит только от деформации, называются *упругими*, а свойство, в силу которого деформация вызывает напряжение, называется *упругостью*.

Отсюда мы находим, что свертывание пружины связано с деформацией ее элементов, и что внешняя сила, обнаруживаемая пружиной, есть равнодействующая напряжений в ее элементах.

Таким образом, мы заменяем непосредственное отношение между свертыванием пружины и силой, которую она обнаруживает, отношением между деформациями и напряжениями элементов пружины, то есть полное перемещение и полную силу, отношение между которыми

может в некоторых случаях иметь чрезвычайно сложный характер, мы заменяем множеством деформаций и равным числом напряжений, причем каждая деформация связана с соответствующим ей напряжением гораздо более простым отношением.

Но при всем том природа связи между конфигурацией и силой остается столь же таинственной, как и раньше. Мы можем лишь отметить факт существования этой связи, и если мы назовем все такие явления явлениями упругости, то может оказаться очень удобным классифицировать их таким образом, при условии, что мы будем помнить, что применением слова «упругость» мы не претендуем на объяснение причины связи между конфигурацией и энергией.

84. Действие на расстоянии. В случае двух магнитов нет никакого видимого вещества, связывающего тела, между которыми существует напряжение. Пространство между магнитами может быть наполнено воздухом или водой, или мы можем поместить магниты в сосуд и начать удалять из него воздух насосом, пока магниты не окажутся в том, что обычно называют пустотой, и все же взаимодействие между магнитами не изменится. Мы можем поместить между магнитами даже твердую пластинку стекла, металла или дерева, и все еще найдем, что взаимодействие магнитов зависит единственно от их относительного положения и не изменяется заметно, если поместить между ними какое-нибудь вещество, лишь бы это не был один из магнитных металлов. Поэтому взаимодействие между магнитами обыкновенно называют *действием на расстоянии.*

Были сделаны попытки, и притом не без некоторого успеха[1], разложить это действие на расстоянии на непрерывное распределение напряжения в невидимой среде и установить таким образом аналогию между магнитным действием и действием пружины или веревки при передаче силы; но все же тот общий факт, что деформации, или изменения конфигурации, сопровождаются напряжениями или внутренними силами, и что при этом в деформируемой системе накопляется энергия, остается фактом, который еще не был объяснен, исходя из какого либо более основного принципа.

[1]См. *Кларк Максвелл.* Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II, Art. 641. [Современные исследования приводят к необходимости предполагать наличие количества движения в среде, которое обнаруживается, например, кроме напряжения еще и в давлении излучения; сравн. приложение к Collected Papers *Пойнтинга* (J. H. Poynting). Это же приходится принимать и для истолкования тензориального поля в современной теории тяготения, построенной на теории относительности].

85. Теория потенциальной энергии сложнее теории кинетической энергии. Мы признали, что энергия материальной системы может зависеть от ее конфигурации, но характер этой зависимости может быть гораздо более сложен, чем характер зависимости кинетической энергии от движения системы. Кинетическую энергию можно вычислить по движению частей системы определенным способом. Мы умножаем массу каждой части на половину квадрата ее скорости и берем сумму всех таких произведений. Потенциальная же энергия, возникающая из взаимодействия двух частей системы, может зависеть от относительного положения частей по закону, который может быть различен в различных случаях. Так, если два бильярдных шара приближаются друг к другу с некоторого расстояния, то между ними нет никакого ощутительного взаимодействия, пока они не сблизятся настолько, что некоторые части будут казаться в соприкосновении. Для того чтобы еще более сблизить центры шаров, нужно заставить сжаться соприкасающиеся части, а это требует затраты работы.

Значит, в этом случае потенциальная энергия постоянна для всех расстояний, бóльших расстояния в момент первого прикосновения, а затем быстро возрастает с дальнейшим убыванием расстояния.

Сила, действующая между магнитами, изменяется с расстоянием по совершенно другому закону, и мы в самом деле убеждаемся, что только опытом можно установить форму зависимости между конфигурацией системы и ее потенциальной энергией.

86. Приложение метода энергии к вычислению сил. Полное знание закона, по которому изменяется энергия материальной системы, при изменении конфигурации и движения системы математически равноценно знанию всех динамических свойств системы. Математические методы, посредством которых все силы и напряжения в движущейся системе выводятся из одной математической формулы, выражающей энергию как функцию переменных, были развиты *Лагранжем, Гамильтоном* и другими выдающимися математиками, но было бы трудно даже описать их в рамках элементарных идей, которыми мы себя ограничили в этой книге. Очерк этих методов дан в моем «Трактате об электричестве», часть IV, глава V, § 533*, а приложение этих динамических методов к электромагнитным явлениям дано в следующих главах трактата.

*Эта глава воспроизведена ниже в виде главы IX настоящего сочинения.

Однако же, если мы будем рассматривать только систему, находящуюся в покое, то нетрудно видеть, каким образом мы можем определить силы системы, если мы можем математически выразить зависимость энергии системы от ее конфигурации.

Предположим, что внешний по отношению к системе агент производит ее перемещение из одной конфигурации в другую; в таком случае, если система обладает в новой конфигурации большим количеством энергии, чем вначале, то она могла получить это приращение энергии только от внешнего агента. Стало быть этот агент должен был совершить работу, равную приращению энергии системы. Для этого он должен был приложить силу по направлению перемещения, и среднее значение этой силы, помноженное на перемещение, должно равняться совершенной работе. Отсюда среднюю величину силы можно найти, разделив приращение энергии на перемещение.

Если перемещение велико, то сила эта может значительно изменяться в продолжение перемещения, так что может оказаться трудным вычислить ее среднюю величину; но сила зависит от конфигурации, а потому, если мы будем уменьшать перемещение, то изменения силы будут также уменьшаться, так что в пределе можно рассматривать силу как постоянную в продолжение перемещения.

Поэтому, если мы вычислим для данной конфигурации *быстроту* возрастания энергии с перемещением, методом, подобным описанному в §§ 27, 28 и 33, то эта быстрота будет численно равна силе, приложенной внешним агентом по направлению перемещения.

Если энергия не возрастает, а убывает при возрастании перемещения, то система должна совершать работу над внешним агентом, а сила, приложенная внешним агентом, должна иметь направление, противоположное направлению перемещения.

87. Различные определения сил. В трактатах по динамике обыкновенно идет речь о силах, с которыми внешний агент действует на материальную систему. С другой стороны, в трактатах об электричестве обыкновенно рассматривают силы, с которыми наэлектризованная система действует против внешнего агента, препятствующего ее движению. Поэтому при чтении какого-нибудь рассуждения о силах необходимо установить, рассматривается ли сила, о которой идет речь, с первой или со второй точки зрения.

Вообще, мы можем избежать двусмысленности, рассматривая явление в целом как напряжение, существующее между двумя точками

или телами, и отличая его как натяжение или давление, притяжение или отталкивание, в зависимости от его направления. Ср. § 55.

88. Приложение к движущейся системе. Таким образом, оказывается, что на основании знания потенциальной энергии системы при всякой возможной конфигурации мы можем определить все внешние силы, требующиеся для того, чтобы удержать систему во [всякой заданной] конфигурации. Если система находится в покое и если эти внешние силы суть действительные (наличные) силы, то система будет оставаться в равновесии. Если система находится в движении, то сила, действующая на каждую частицу, состоит из силы, возникающей из связей системы (равной и противоположной только что вычисленной внешней силе), и какой-нибудь внешней силы, которая может быть приложена к ней. Стало быть, полное знание закона изменения потенциальной энергии с конфигурацией дало бы нам возможность предсказывать всякое возможное движение системы под действием данных внешних сил, при условии, что мы в состоянии преодолеть чисто математические трудности вычисления.

89. Приложение метода энергии к исследованию действительных тел. Когда мы переходим от отвлеченной динамики к физике, — от материальных систем, единственные свойства которых суть те, которые выражены в их определениях, к реальным телам, которых свойства надлежит исследовать, — то убеждаемся, что существует много явлений, которые мы не в состоянии свести к изменениям в конфигурации и движении материальной системы.

Конечно, если мы начнем с предположения, что действительные тела это системы, состоящие из материи, удовлетворяющей во всех отношениях принятым определениям, то можем идти дальше, утверждая, что все явления суть изменения конфигурации и движения, хотя мы и не подготовлены к тому, чтобы определить характер конфигурации и движения, которым могут быть объяснены отдельные явления. Но в точной науке такие гипотезы должны оцениваться не по тому, что они обещают, а по тому, что они дают. Конфигурация и движение системы — это факты, поддающиеся точному описанию, а потому, чтобы объяснение явления конфигурацией и движением материальной системы могло быть допущено как дополнение к нашему научному знанию, нужно определить конфигурации, движения и силы и показать, что они согласуются с известными фактами и способны дать объяснение явлению.

90. Переменные, от которых зависит энергия. Но даже в том случае, если изучаемые нами явления еще не объяснены динамически, мы все же можем пользоваться принципом сохранения энергии, как руководителем в наших изысканиях.

Для того чтобы применить этот принцип, мы прежде всего принимаем, что количество энергии в материальной системе зависит от состояния этой системы, так что данному состоянию соответствует определенное количество энергии.

Первый шаг состоит в определении различных состояний системы, и когда мы имеем дело с действительными телами, то должны определить их состояние не только с точки зрения конфигурации и движения их видимых частей, но, если у нас есть основание подозревать, что конфигурация и движение их невидимых частиц влияют на видимое явление, мы должны придумать какой-нибудь метод оценки возникающей вследствие этого энергии.

Так, давление, температура, электрический потенциал и химический состав суть переменные величины, значения которых служат для определения состояния тела, и в общем энергия тела зависит от значений этих и других переменных.

91. Энергия, выраженная через эти переменные. Следующий шаг в нашем исследовании состоит в том, чтобы определить, сколько работы должен совершить над телом внешний агент для того, чтобы перевести его из одного данного состояния в другое.

Для этой цели достаточно знать работу, требующуюся для того, чтобы перевести тело из особого состояния, которое мы можем назвать *начальным состоянием*, в любое другое данное состояние. Энергия в последнем состоянии равна энергии в начальном состоянии, сложенной с работой, требующейся для перевода тела из начального в конечное состояние. Тот факт, что эта работа одна и та же, через какой бы ряд состояний ни прошла система при переходе из начального состояния в конечное, является основанием всей теории энергии.

Так как все явления зависят от изменений энергии тела, а не от ее полного значения, то нет необходимости, даже если бы это было возможно, сделать какую-нибудь оценку энергии тела в его начальном состоянии.

92. Теория теплоты. Одно из самых важных приложений закона сохранения энергии — это к исследованию природы теплоты.

Одно время предполагали, что различие между теплым и холодным телом обусловливается присутствием вещества, называемого теплородом, который находится в большем количестве в теле, когда оно тепло, чем в том случае, когда оно холодно. Но опыты *Румфорда* над теплотой, выделяющейся при трении металла о металл, и опыты *Дэви* над плавлением льда трением показали, что в том случае, когда работа затрачивается на преодоление трения, количество произведенной теплоты пропорционально затраченной работе.

Опыты *Гирна* показали, кроме того, что если теплоту заставляют совершать работу в паровой машине, то часть тепла исчезает, и что количество исчезающей теплоты пропорционально произведенной работе.

Весьма тщательное измерение работы, затраченной на трение, и произведенной при этом теплоты, было произведено *Джоулем*, который находит, что теплота, требующаяся для того, чтобы поднять температуру одного фунта воды от 39°Ф до 40°Ф, эквивалентна 772 фунто-футам работы в Манчестере, или 24,858 паундал-футам.

Отсюда мы можем определить, что теплота, требующаяся для того, чтобы поднять температуру одного грамма воды от 3°С до 4°С, есть 42 000 000 эргов.

93. Теплота есть форма энергии. Итак, теплота может быть создана, а поэтому она не может быть веществом; всякий раз, когда механическая энергия теряется благодаря трению, создается теплота, а всякий раз, когда получается механическая энергия в машине, происходит потеря тепла, и так как количество потерянной или полученной энергии пропорционально количеству полученной или потерянной теплоты, мы заключаем, что теплота есть вид энергии.

Мы имеем также основания полагать, что мелкие частицы теплого тела находятся в состоянии быстрого суетливого движения (agitation), то есть что каждая частица всегда очень быстро движется, но направление ее движения так часто меняется, что она очень мало или совсем не перемещается из одного места в другое.

Если это верно, то часть, и может быть очень большая часть, энергии теплого тела должна быть в форме кинетической энергии.

Но для нашей настоящей цели нет необходимости определить, в какой форме содержится энергия в теплом теле; важнее всего то обстоятельство, что эта энергия может измеряться в виде теплоты, а так

как каждый вид энергии может быть превращен в теплоту, то это дает нам один из самых удобных методов измерения энергии.

94. Энергия, измеряемая в тепловых единицах. Так, когда известные вещества приводятся в соприкосновение, то происходят химические реакции, вещества соединяются в новые комбинации, и новая группа веществ имеет химические свойства, отличные от свойств первоначальной группы веществ. В течение этого процесса может быть совершена механическая работа расширением смеси, как, например, при взрыве пороха, может быть произведен электрический ток, как в гальванической батарее, и может выделиться теплота, как при большинстве химических реакций.

Если энергия расходуется в виде механической работы, то она может быть непосредственно измерена или может быть превращена трением в теплоту. Энергию, которая тратится на производство электрического тока, можно определить в форме теплоты, если дать току протекать по проводнику такой формы, чтобы появляющаяся теплота могла быть удобно измерена. Нужно стараться, чтобы энергия не передавалась на расстояние в виде звука или лучистой теплоты, не будучи надлежащим образом учтена.

Энергия, остающаяся в смеси, сложенная с той энергией, которая выделилась, должна равняться первоначальной энергии.

Эндрюс, Фавр, Зильберман, [*Юлиус Томсен*] и другие измерили количество теплоты, выделяющейся, когда известное количество кислорода или хлора соединяется с эквивалентным ему количеством других веществ. Эти измерения позволяют нам вычислить избыток энергии, которую рассматриваемые вещества имели в их первоначальном состоянии до соединения над энергией, которой они обладают после соединения.

95. Предстоящая научная работа. Хотя уже сделано большое число превосходных работ этого рода, но размеры исследованного до сих пор поля кажутся совершенно незначительными, если принять во внимание бесконечное разнообразие и сложность тел природы, с которыми придется иметь дело.

В действительности, существенная работа, лежащая перед физиком-исследователем при современном состоянии науки, состоит в определении количества энергии, которое прибавляется к материальной системе или оставляет ее при переходе системы от ее начального состояния в какое-нибудь другое определенное состояние.

96. История учения об энергии. Научная важность обозначения особым именем той величины, которую мы называем кинетической энергией, была, кажется, впервые понята *Лейбницем*, давшим произведению массы на квадрат скорости название *живой силы* (vis viva). Живая сила есть удвоенная кинетическая энергия.

Ньютон, в «Поучении к законам движения», выражает отношение между быстротой, с которой работа совершается внешним агентом, и быстротой, с которой она тратится, накопляется или превращается какой-нибудь машиной или другой материальной системой, в следующем утверждении, которое он делает с целью показать, как далеко простирается приложение третьего закона движения.

«Если действие внешнего агента оценивать пропорционально произведению силы на скорость и, подобно этому, противодействие сопротивления оценивать для каждой части системы в отдельности пропорционально произведению ее скорости на силу сопротивления, происходящую от трения, сцепления, веса и ускорения, то действие и противодействие будут равны между собою, какова бы ни была природа и движение системы». Что это соображение заключает в себе в скрытом виде почти все учение об энергии, впервые указали *Томсон* и *Тэт**.

Слова «действие» и «противодействие», когда они встречаются в изложении третьего закона движения, объясняют в том смысле, что под ними подразумеваются силы, то есть что действие и противодействие представляют собой противоположные стороны одного и того же напряжения.

В цитированном выше месте этим словам придается новый и совершенно иной смысл тем, что действие и противодействие оцениваются произведением силы на скорость ее точки приложения. Согласно этому определению, действие внешнего агента есть быстрота, с которой он совершает работу. Это то, что понимают под *мощностью* паровой машины или другого двигателя. Ее обыкновенно выражают, оценивая

*Treatise on Natural Philosophy, vol. I, 1867, § 268.

«*Ньютон*, в Поучении к своему третьему закону движения, изложил отношение между работой и кинетической энергией столь совершенным образом, что лучше сделать это невозможно, но вместе с тем с таким явно малым усилием или желанием привлечь внимание, что никто, кажется, не был поражен огромной важностью этого места, пока она не была указана недавно (1867 г.) *Томсоном* и *Тэтом*». Clerk Maxwell, Theory of Heat, ch. IV on «Elementary Dynamical Principles, p. 91 (*Кларк Максвелл*. Теория теплоты, гл. IV, об «Основных динамических принципах»).

число лошадей, которое потребовалось бы для того, чтобы совершать работу с той же быстротой, что и машина; это число и называют числом лошадиных сил машины.

Когда мы желаем выразить одним словом быстроту, с которой совершает работу какой-нибудь внешний агент, то называем ее мощностью этого агента, измеряя мощность работой, произведенной в единицу времени.

Употребление термина «энергия», в точном и научном смысле, для выражения количества работы, которую может совершить материальная система, было введено доктором *Юнгом*[*].

97. О различных видах энергии. Энергия, которую тело имеет в силу своего движения, называется кинетической энергией.

Система может также обладать энергией в силу своей конфигурации, если силы системы таковы, что система произведет работу против внешнего сопротивления, когда она перейдет в новую конфигурацию. Такая энергия называется потенциальной энергией.

Так, если поднять камень на известную высоту над поверхностью земли, то система двух тел, камня и земли, имеет потенциальную энергию и может совершить известное количество работы при падении камня. Эта потенциальная энергия порождается тем обстоятельством, что человек, который поднимает камень, удаляя его от земли, должен затратить на это работу и после того как камень поднят, притяжение между землей и камнем обладает способностью производить работу, когда камень будет опускаться. Этот вид энергии зависит, таким образом, от работы, которую совершили бы силы системы, если бы части последней поддались действию этих сил. Именно это *Гельмгольц* назвал «суммой натяжений» в его знаменитом мемуаре о «сохранении энергии»[**]. *Томсон* назвал эту энергию статической энергией; ее называли также энергией положения; но *Ранкин* ввел термин *потенциальная энергия*[***] — весьма счастливое выражение, ибо оно не только обозначает энергию, которой система не имеет в действительном обладании, а лишь имеет способность приобрести, но указывает, кроме

[*] Lectures on Natural Philosophy [1807], Lecture VIII.

[**] Берлин, 1847. [Замечателен главным образом своими обширными применениями к электрической и химической теориям].

[***] *Vis potentialis Даниила Бернулли*, противополагаемая *vis viva*, напр., для случая согнутой пружины; сравн. Euler, De Curvis Elasticis, в прибавлении к Solutio Problematis Isoperimetrici ... (1744).

того, на ее связь с тем, что было названо (по другим основаниям) потенциальной функцией*.

Различные виды, в которых обнаружено существование энергии в материальных системах, были отнесены к одному из этих двух классов — кинетической энергии, порождаемой движением, и потенциальной энергии, порождаемой конфигурацией.

Так, теплое тело, передающее теплоту более холодному телу, может произвести работу, заставляя холодное тело расширяться, преодолевая давление. Значит, материальная система, в которой имеется неравномерное распределение температуры, обладает способностью производить работу или энергией. В настоящее время полагают, что эта энергия есть кинетическая энергия беспорядочного движения мельчайших частей теплого тела.

Огнестрельный порох обладает энергией, так как, если его зажечь, он способен привести в движение пушечное ядро. Энергия пороха есть химическая энергия, происходящая от способности составных элементов пороха принять новое расположение после взрыва, так чтобы занять больший объем, чем порох. При нынешнем состоянии науки химики представляют себе химическую реакцию, как изменение расположения частиц под действием сил, стремящихся произвести это изменение. Стало быть, с этой точки зрения, химическая энергия есть потенциальная энергия.

Воздух, сжатый в камере воздушного ружья, способен вытолкнуть пулю. Одно время предполагали, что энергия сжатого воздуха происходит от взаимного отталкивания его частиц. Если бы это объяснение было верно, то энергия сжатого воздуха была бы потенциальной энергией.

В новейшее время пришли к мысли, что частицы воздуха находятся в состоянии движения и что его давление вызывается ударами этих частиц о стенки сосуда. Согласно этой теории, энергия сжатого воздуха есть кинетическая энергия.

Существует, таким образом, много различных форм, в которых материальная система может обладать энергией, и в некоторых случаях нельзя решить, есть ли это кинетическая или потенциальная энергия. Природа энергии остается, однако, той же самой, в какой бы форме она

---

*Термином «потенциал» пользовались независимо *Гаусс* и *Грин*, и, по всей вероятности, он ведет свое начало от *Д. Бернулли*.

ни находилась. Количество энергии можно всегда выразить, приравнивая его энергии тела определенной массы, движущегося с определенной скоростью.

Глава 6

Повторительный обзор

98. Ретроспективный взгляд на общую динамику. Мы теперь прошли ту часть основной науки о движении материи, которую были в состоянии изложить достаточно элементарно, в согласии с планом этой книги.

Нам остается обозреть взаимоотношения между частями этой науки и отношение целого к другим физическим наукам, и теперь мы можем это сделать более удовлетворительным образом, чем тогда, когда мы еще не были введены в существо предмета.

99. Кинематика. Мы начали с кинематики, или науки о самом движении. Понятия, которые вводятся в этом отделе предмета, суть понятия пространства и времени. Единственное свойство материи, которое входит в наше рассмотрение, это ее непрерывное существование в пространстве и времени — именно, то обстоятельство, что каждая частица материи во всякий момент времени занимает одно и только одно место, и изменение ее положения в течение любого промежутка времени совершается движением по непрерывной траектории.

Ни сила, влияющая на движение тела, ни масса тела, от которой зависит величина силы, требующейся для того, чтобы произвести движение, не останавливают на себе нашего внимания в чистой науке о движении.

100. Сила. В следующем отделе предмета рассматривается сила с точки зрения ее влияния на движение массы.

Если мы сосредоточим наше внимание на одном теле, то наше исследование дает нам возможность из наблюдения его движения определить направление и величину равнодействующей всех сил, действующих на тело, и это исследование есть типичный образец всех изысканий, предпринимаемых с целью открытия и измерения физических сил.

Но это можно рассматривать, как простое приложение определения силы, а не как новую физическую истину.

Когда мы определяем равные силы, как такие, которые сообщают одинаковое ускорение одной и той же массе, а равные массы, как такие массы, которые получают одинаковые ускорения от равных сил, то нетрудно усмотреть, что такое определение равенства сил сводится к

утверждению физической истины, что сравнение количеств материи по силам, требующимся для сообщения им данного ускорения, есть метод, всегда ведущий к согласным результатам, каковы бы ни были абсолютные значения сил и ускорений.

101. Напряжение. Следующий шаг в науке о силе состоит в том, что мы переходим от рассмотрения силы, как [отдельно] действующей на тело, к той точке зрения, что сила представляет собой одну сторону того взаимодействия между двумя телами, которое названо *Ньютоном* действием и противодействием и которое теперь короче называют одним словом «напряжение».

102. Относительность динамических знаний. Весь наш прогресс до сего момента можно описать, как постепенное развитие учения об относительности всех физических явлений. Мы, очевидно, должны признать положение относительным, ибо не можем определить положение тела никаким способом, который не выражал бы отношения. В обыденном языке употребление слов «движение» и «покой» не исключает столь определенно представление о возможности их абсолютного измерения, но причина этого та, что в нашей обыденной речи мы молчаливо предполагаем, что земля находится в покое.

Когда наши понятия о пространстве и движении становятся яснее, мы убеждаемся, как все здание динамического учения связано в одну стройную систему.

Наше первоначальное представление было, может быть, таково, что абсолютное знание того, где мы находимся и в каком направлении мы движемся, есть существенный элемент нашего знания, как знания сознательных существ.

Но это представление, хотя его, несомненно, разделяли многие мудрецы древности, было постепенно изгнано из умов лиц, изучающих физику.

В пространстве нет межевых знаков; одна часть пространства совершенно тождественна всякой другой ее части, так что нельзя сказать, в какой части мы находимся. Мы как бы находимся на спокойной глади моря без звезд, компаса, лота, ветра или течения и не можем сказать, по какому направлению мы плывем. У нас нет лага, который мы могли бы бросить, чтобы рассчитать нашу скорость; мы можем оценить быстроту нашего движения только относительно соседних тел, но не знаем, не движутся ли сами эти тела в пространстве.

103. Относительность силы. Мы не можем даже сказать, какая сила на нас действует; мы можем лишь указать разность между силой, действующей на один предмет, и силой, действующей на другой*.

Мы имеем действительный пример этого в нашем каждодневном опыте. Земля совершает за год полный оборот вокруг солнца, находясь от него на расстоянии в 91 520 000 миль или $1{,}473 \cdot 10^{13}$ сантиметров**. Отсюда следует, что на землю действует по направлению к солнцу сила, сообщающая земле по направлению к солнцу ускорение приблизительно в 0,019 в футах и секундах или около $\frac{1}{1680}$ напряжения силы тяжести на земной поверхности.

Сила, равная одной тысячашестисотой части веса тела, могла бы быть легко измерена известными экспериментальными методами, особенно, если направление этой силы образует с вертикалью различные углы в разные часы дня.

Если бы притяжение солнца действовало на твердую часть земли иначе, чем на подвижные тела, над которыми мы производим опыт, то тело, подвешенное на шнурке и движущееся вместе с землей, показало бы разность между действием солнца на тело и его действием на землю, как целое.

Например, если бы солнце притягивало землю и не притягивало бы подвешенного тела, то при восходе точка привеса, неизменно соединенная с землей, притягивалась бы к солнцу, между тем как на подвешенное тело действовало бы лишь притяжение земли, и шнурок казался бы отклоненным от солнца на одну тысячашестисотую часть длины шнурка. При закате шнурок отклонился бы от заходящего солнца на такую же величину; а так как восход и закат солнца происходят в различных точках горизонта, то отклонения нити происходили бы в различных направлениях, и различие положения отвеса при восходе и закате солнца можно было бы легко заметить.

Но притяжение тяготения действует одинаковым образом на все виды материи на одном и том же расстоянии от притягивающего тела. При восходе и закате солнца центр земли и подвешенное тело находятся приблизительно на одинаковом расстоянии от солнца, и в эти моменты нельзя заметить никакого отклонения отвеса, вызываемого солнечным притяжением. Следовательно, это притяжение, поскольку

---

*См. приложение I.

**Более современные значения суть $9{,}28 \cdot 10^7$ миль, или $1{,}494 \cdot 10^{13}$ см.

оно одинаково действует на все тела на земле, не оказывает никакого влияния на их относительные движения. Лишь различия напряжения и направления притяжения, действующего на различные части земли, могут произвести некоторый эффект, но эти различия столь малы для тел, отделенных умеренными расстояниями, что лишь в том случае, когда подвергающееся их действию тело очень велико, как в случае океана, влияние различного притяжения становится заметным в виде приливов и отливов.

104. Вращение. До сих пор, говоря о движении тел, мы молчаливо предполагали, что, сравнивая одну конфигурацию системы с другой, мы можем провести в последующей конфигурации прямую, параллельную любой прямой в начальной конфигурации. Другими словами, мы предполагаем, что существуют некоторые направления в пространстве, которые можно рассматривать как постоянные и к которым могут быть отнесены другие направления во все время движения системы.

В астрономии прямая, проведенная от земли к звезде, может рассматриваться как неизменная по направлению, потому что относительное движение земли и звезды вообще так мало в сравнении с расстоянием между ними, что изменение направления, даже за столетие, весьма незначительно. Но очевидно, что все такие основные направления должны быть указываемы конфигурацией некоторой материальной системы, существующей в пространстве, и что если бы эта система была совершенно удалена, то первоначальные основные направления никогда не могли бы быть вновь открыты.

Но если нельзя определить абсолютную скорость тела в пространстве, то возможно определить, является ли направление некоторой прямой в материальной системе постоянным или переменным.

Например, из наблюдений, произведенных только на земле, без отношения к небесным телам, возможно определить, вращается ли земля или нет.

Поскольку дело касается геометрической конфигурации земли и небесных тел, очевидно, все равно*:

> ... солнце ли восходит над землею,
> Над солнцем ли восходит шар земли,

*Из рассуждения о небесных движениях в *Потерянном Раю* (книга VIII, стихи 160–6) (перевод *О. Н. Чюминой*); вспомним встречу *Мильтона* с *Галилеем*, когда он в молодости посетил Италию.

Оно ли путь с востока начинает,
Иль с запада свершает путь урочный,
И на оси вращается земля.

Расстояние между телами, составляющими вселенную, как небесными, так и земными, и углы между прямыми, их соединяющими, — вот все, что можно определить, не прибегая к динамическим принципам, а на эти величины не окажет влияния любое вращательное движение, подобное вращению твердого тела около оси, если оно будет существовать одновременно с действительным движением; так что с геометрической точки зрения система *Коперника*, согласно которой земля вращается, не имеет никакого преимущества, помимо своей простоты, над той системой, в которой земля предполагается в покое, а видимые движения небесных тел суть их абсолютные движения.

Даже если мы сделаем следующий шаг и рассмотрим динамическую теорию вращения земли около своей оси, то мы можем объяснить ее сплюснутую фигуру и равновесие океана и всех других тел на ее поверхности любой из двух гипотез — гипотезой движения земли вокруг своей оси или той гипотезой, по которой земля не вращается и приняла свою сплюснутую форму под влиянием силы, действующей по всем направлениям от оси наружу, причем величина этой силы возрастает с увеличением расстояния от оси. Такая сила, если бы она действовала на все виды материи одинаково, объясняла бы не только сплюснутую форму земли, но и условия равновесия всех тел, покоящихся относительно земли.

Лишь в том случае, если мы пойдем дальше и рассмотрим явления тел, движущихся относительно земли*, лишь тогда мы действительно будем вынуждены допустить, что земля вращается.

105. Ньютоново определение абсолютной скорости вращения. *Ньютон* первый указал, что абсолютное вращательное движение земли могло бы быть доказано опытами над вращением материальной системы. Например, если ведро воды подвешено к балке на веревке, и веревка так закручена, что заставляет ведро вертеться около вертикальной оси, то вода вскоре начнет вращаться с той же самой скоростью, что и ведро, так что система из воды и ведра будет вращаться вокруг своей оси, подобно твердому телу.

---

*Как в § 105. См. также приложение I.

Вода во вращающемся ведре приподнимается у краев и опускается в середине, показывая этим, что для того, чтобы заставить ее двигаться по окружности, необходимо приложить давление по направлению к оси. Эта вогнутость поверхности зависит от абсолютного вращательного движения воды, а не от ее относительного вращения.

Она не зависит, например, от вращения относительно ведра, ибо в начале опыта, когда мы привели только ведро во вращательное движение, и воде движение еще не сообщилось, вода и ведро находятся в относительном движении, а поверхность воды плоская, потому что не вода вращается, а лишь ведро.

Когда вода и ведро вращаются вместе, то между ними нет относительного движения, но поверхность воды вогнута, потому что она вращается.

Если ведро останавливается, то до тех пор, пока вода продолжает вращаться, ее поверхность остается вогнутой, показывая, что она еще вращается, хотя ведро остановилось.

Очевидно, все равно, поскольку дело касается этого опыта, происходит ли вращение по направлению часовой стрелки или в противоположном направлении, при условии, что скорость вращения одинакова.

Предположим теперь, что этот опыт производится на северном полюсе. Пусть ведро приводится во вращение посредством надлежащим образом приспособленного часового механизма либо по направлению часовой стрелки, либо в противоположном направлении с совершенно равномерной угловой скоростью.

Если часовой механизм заставляет его совершать один оборот в двадцать четыре часа (звездного времени) по направлению стрелки часов, положенных циферблатом кверху, то ведро будет вращаться относительно земли, но не будет вращаться относительно звезд.

Если остановить часовой механизм, то ведро будет вращаться относительно звезд, но не относительно земли.

Наконец, если оно совершает один оборот в двадцать четыре часа (звездного времени) в противоположном направлении, то оно будет вращаться относительно земли с той же быстротой, что и в первом случае, но вместе с тем оно будет вращаться со скоростью одного оборота в двенадцать часов и относительно звезд.

Итак, если земля находится в покое, а звезды движутся вокруг нее, то форма поверхности будет одинакова в первом и в последнем случае; если же земля вращается, то вода будет вращаться в последнем

случае, но не будет в первом, и это сделается очевидным потому, что вода поднимется у краев в последнем случае выше, чем в первом.

В действительности поверхность воды не будет вогнута ни в одном из предположенных случаев, потому что влияние тяжести, действующей по направлению к центру земли, делает поверхность выпуклой, как поверхность моря, и быстрота вращения в нашем опыте недостаточна для того, чтобы сделать поверхность вогнутой. Она сделает ее лишь немного менее выпуклой, чем поверхность моря, в последнем случае, и немного более выпуклой — в первом.

Но различие в форме поверхности воды было бы столь ничтожно малым, что при наших способах измерения было бы безнадежно пытаться определить вращение земли этим путем.

106. Маятник Фуко. Самый удовлетворительный способ для этой цели — это способ, придуманный *Фуко**.

Тяжелый шар подвешен на проволоке к неподвижной точке таким образом, что он может качаться, как маятник, в любой вертикальной плоскости, проходящей через неподвижную точку.

При пускании маятника нужно стараться, чтобы проволока в тот момент, когда маятник находится в самой низшей точке своего пути, точно проходила через то положение, которое она принимает, когда висит вертикально. Если она проходит по одну сторону от этого положения, то она возвратится с другой стороны, и этого движения маятника вокруг вертикали вместо того, чтобы двигаться через нее, нужно постараться избежать, ибо мы хотим избавиться от всех вращательных движений, в каком бы то ни было направлении.

Рассмотрим момент количества движения маятника около вертикальной линии, проходящей через неподвижную точку.

В тот момент, когда проволока маятника проходит через вертикальную линию, момент количества движения около вертикали есть нуль.

Сила тяжести действует всегда параллельно этой вертикальной линии, а потому она не может произвести момента количества движения около нее. Натяжение проволоки действует всегда через неподвижную

*В настоящее время постоянство направления в пространстве плоскости вращения быстро вертящегося на оси колеса, — метод, который тоже ведет свое начало от *Фуко*, — обнаружило бы вращение земли легче всего. Сравн. § 71. Гиростатический компас и вращение земли связаны тем же законом.

точку, а потому не может произвести момента количества движения около вертикальной линии.

Следовательно, маятник никогда не может приобрести момента количества движения около вертикальной линии, проходящей через точку подвеса.

Поэтому, когда проволока выходит из вертикали, то вертикальная плоскость, проходящая через центр шара и точку подвеса, не может вращаться; ибо, если бы это было так, то маятник имел бы момент количества движения около вертикали*.

Предположим теперь, что опыт производится на северном полюсе. Плоскость качания маятника будет оставаться абсолютно постоянной по направлению, так что, если земля вращается, то ее вращение сделается очевидным.

Нужно лишь провести на земле линию, параллельную плоскости качаний, и сравнить положение этой линии с положением плоскости качаний через некоторое время.

Так как такого рода маятник, надлежащим образом подвешенный, будет качаться в течение нескольких часов, то легко определить, постоянно ли положение плоскости качаний относительно земли, как это должно быть, если земля находится в покое, или постоянно относительно звезд, если звезды не движутся вокруг земли.

Ради простоты изложения мы предположили, что опыт производится на северном полюсе. Но нет необходимости отправляться туда для того, чтобы доказать вращение земли. Единственная область, где опыт ничего не покажет, находится на экваторе.

Во всяком другом месте маятник укажет угловую скорость вращения земли относительно вертикали этого места, Если в некоторый момент плоскость маятника проходит через звезду, находящуюся близ горизонта, восходящую или заходящую, то она и в дальнейшем будет проходить через эту звезду до тех пор, пока она находится вблизи горизонта. Это значит что горизонтальная составляющая видимого

---

*Но если бы, вследствие недостатка предосторожности, шар описывал явную эллиптическую кривую, как угодно удлиненную, то эта кривая качания поворачивалась бы на угол в $\frac{3}{4}\Omega$ за каждый оборот шара и в том же направлении, где Ω есть (малая) величина конического угла, описанного проволокой. Это легко замаскировало бы эффект вращения земли. Если бы шар мог свободно вращаться около проволоки, как оси, то кривая отклонялась бы на угол Ω в течение каждого оборота.

движения звезды над горизонтом равна угловой скорости вращения плоскости качаний маятника.

Было замечено, что в южном полушарии плоскость качания вращается в противоположном направлении, и из сравнения скоростей в различных местах вывели действительное время вращения земли независимо от астрономических наблюдений. Среднее значение, выведенное из этих опытов *Галбрэйтом* (Galbraith) и *Аутоном* (Haughton) в их «Руководстве астрономии», составляет 23 часа 53 минуты 37 секунд. Истинное время вращения земли составляет 23 часа 56 минут 4 секунды среднего солнечного времени.

107. Материя и энергия*. Все, что мы знаем о материи, относится к ряду явлений, в которых энергия передается от одной части материи к другой, пока какая-нибудь из этих частей не повлияет на наши органы чувств, и мы не испытаем того или иного ощущения.

Умственным процессом, который основывается на таких ощущениях, мы приходим к установлению условий этих ощущений и прослеживаем их до вещей, которые не составляют части нас самих; но всегда факт, который мы изучаем, есть взаимодействие между телами. Это взаимодействие мы старались описать в настоящем трактате. Исходя из различных точек зрения, его называют силой, действием и противодействием или напряжением, и проявляется оно в изменении движения тел, между которыми оно действует.

Процесс, посредством которого напряжение производит изменение движения, называется работой, и, как мы уже показали, работа может рассматриваться как передача энергии от одного тела системы другому.

Итак, как уже говорилось, мы знакомы с материей лишь как с чем-то, что обладает энергией, сообщенной ему другой материей, и что может, в свою очередь, передать энергию другой материи.

С другой стороны, энергию мы знаем лишь как нечто непрерывно переходящее, во всех явлениях природы, от одной части материи к другой.

108. Критерий существования материальной субстанции. Энергия не может существовать иначе, как в связи с материей. Отсюда, так как в пространстве между солнцем и землей световые и тепловые излучения, которые оставили солнце и еще не достигли земли,

*См. приложение II.

обладают энергией, количество которой в кубической миле может быть измерено, то эта энергия должна принадлежать материи, существующей в межпланетных пространствах, а так как лишь благодаря свету, который достигает нас, мы узнаем о существовании самых отдаленных звезд, то мы заключаем, что материя, передающая свет, рассеяна по всей видимой вселенной.

109. Энергия неспособна к отождествлению. Мы не можем отождествить отдельной части энергии или проследить ее через ее превращения. Она не имеет индивидуального существования, какое мы, например, приписываем отдельным частям материи.

Явления материальной вселенной кажутся происходящими таким же образом, как сделки в кредитной системе*. Каждая сделка состоит в передаче некоторого кредита или энергии от одного тела другому. Этот акт передачи или платежа называется работой. Энергия, таким образом переданная, не сохраняет никакого признака, по которому ее можно было бы отличить, когда она переходит от одного вида к другому.

110. Абсолютное значение энергии тела неизвестно. Энергия материальной системы может быть оценена лишь относительным образом.

Прежде всего, хотя энергия движения частей относительно центра массы и может быть точно определена, но полная энергия состоит из этой энергии, сложенной с энергией массы, равной массе всей системы, движущейся со скоростью центра массы. Но эта последняя скорость — скорость центра массы — может быть оценена лишь относительно какого-нибудь тела, внешнего по отношению к системе, и значение, которое мы припишем этой скорости, будет различно в зависимости от того, какое тело мы выберем за начало.

Итак, найденная кинетическая энергия материальной системы содержит часть, значение которой нельзя определить иначе, как посредством произвольного выбора начала. Единственное начало, которое не было бы произвольно, есть центр массы материальной вселенной, но положение и движение этой точки нам совершенно неизвестно.

111. Скрытая энергия. Но энергия материальной системы неопределима и по другой причине. Мы не можем привести систему в

*За исключением, может быть, того, что кредит может быть искусственно увеличен или раздут.

такое состояние, в котором она совершенно не имела бы энергии, и некоторое количество энергии, которое нельзя никогда удалить из системы, должно остаться неощутимым для нас, потому что мы лишь тогда можем исследовать энергию, когда она входит в систему или оставляет ее.

Следовательно, мы должны рассматривать энергию материальной системы как величину, для которой мы можем определять лишь увеличение или уменьшение при переходе системы из одного определенного состояния в другое. Абсолютное значение энергии в некотором определенном состоянии нам неизвестно и не имело бы для нас никакой цены, если бы мы его знали, ибо все явления зависят от изменений энергии, а не от ее абсолютного значения.

112. Полное рассмотрение энергии охватило бы всю совокупность физических наук. Рассмотрение различных форм энергии — энергии тяготения, электромагнитной, молекулярной, тепловой и т. д. — вместе с условиями превращения энергии из одной формы в другую и непременно существующего рассеяния энергии, полезной для производства работы, составляет содержание всей совокупности физических наук, поскольку они развились в динамической форме под различными названиями астрономии, электричества, магнетизма, оптики, теории физических состояний тел, термодинамики и химии.

Глава 7

Маятник и сила тяжести

113. О равномерном движении по окружности. Пусть M (рис. 11) есть тело, движущееся по окружности со скоростью V.

Пусть $OM = r$ есть радиус этой окружности.

Направление скорости тела M есть направление касательной к окружности. Проведем через центр окружности линию OV, параллельную этому направлению и равную расстоянию, описанному в единицу времени со скоростью V; тогда $OV = V$.

Если примем точку O за начало диаграммы скоростей, то V изобразит скорость тела в точке M.

Когда тело обойдет окружность, точка V тоже опишет окружность, и скорость точки V будет относиться к скорости точки M, как OV относится к OM.

Следовательно, если мы проведем прямую OA, составляющую продолжение MO, а потому параллельную направлению движения точки V, сделаем OA третьей пропорциональной к OM и OV и примем точку O за начало диаграммы ускорений, то точка A будет изображать скорость точки V или, что то же самое, ускорение точки M.

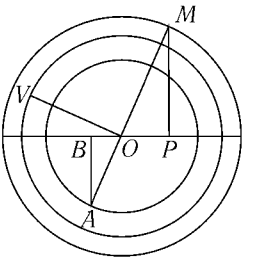


Рис. 11

Итак, когда тело движется равномерно по окружности, то его ускорение направлено к центру окружности и есть третья пропорциональная к радиусу окружности и скорости тела.

Сила, действующая на тело M, равна произведению этого ускорения на массу тела, или, если F есть эта сила,

$$F = \frac{MV^2}{r}.$$

114. Центробежная сила. Вычисленная нами сила F есть та сила, которая должна действовать на тело M для того, чтобы удерживать его на окружности радиуса r, по которой оно движется со скоростью V.

Направление этой силы есть направление к центру окружности.

Если эта сила осуществлена посредством шнурка, привязанного к телу, то шнурок будет в состоянии натяжения. Тому лицу, которое держит другой конец шнурка, будет казаться, что это натяжение направлено к телу M, как будто тело M стремится удалиться от центра окружности, которую оно описывает.

Отсюда эту последнюю силу часто называют *центробежной силой.*

Так как сила, которая на самом деле действует на тело, направлена к центру окружности, то она называется *центростремительной силой*, и в некоторых популярных изложениях описывают центростремительную и центробежную силы как противоположные и взаимно уравновешивающиеся силы. Но они просто представляют различные стороны одного и того же напряжения [действующего в шнурке].

115. Период движения. Время, в течение которого описывается полная окружность, называется периодом движения.

Если π обозначает отношение длины окружности к ее диаметру, равное 3,14159..., то длина окружности радиуса r есть $2\pi r$; а так как окружность описывается в течение периода T со скоростью V, то имеем

$$2\pi r = VT.$$

Отсюда

$$F = 4\pi^2 M \frac{r}{T^2}.$$

Скорость кругового движения часто характеризуют числом оборотов в единицу времени. Обозначим это число [частоту] через n; тогда

$$nT = 1$$

и

$$F = 4\pi^2 M r n^2.$$

116. О простых гармонических колебаниях. Если в то время, как тело M (рис. 11) движется равномерно по окружности, другая точка P движется по неподвижному диаметру этой окружности так, что она всегда находится в основании перпендикуляра, опущенного из точки M на этот диаметр, то говорят, что тело P совершает *простые гармонические колебания.*

Радиус r окружности называется *амплитудой* колебания.

Период точки M называется *периодом колебания.*

Угол, который радиус OM образует с положительным направлением неподвижного диаметра, называется *фазой* колебания.

117. О силе, действующей на колеблющееся тело. Единственное различие между движениями точек M и P состоит в том, что точка M имеет [еще] вертикальное движение, складывающееся с горизонтальным движением, тождественным с движением точки P. Следовательно, скорость и ускорение обоих тел разнятся только на вертикальные составляющие скорости и ускорения точки M.

Поэтому ускорение точки P есть горизонтальная составляющая ускорения точки M, а так как ускорение точки М изображается вектором $\overline{OA}$, лежащим на продолжении MO, то ускорение точки P изображается вектором $\overline{OB}$, где B есть основание перпендикуляра, опущенного из точки A на горизонтальный диаметр. Теперь из подобия треугольников OMP и OAB имеем

$$OM : OA = OP : OB.$$

Но

$$OM = r, \quad \text{а} \quad OA = -4\pi^2 \frac{r}{T^2}.$$

Отсюда

$$OB = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot OP = -4\pi^2 n^2 \cdot OP.$$

Итак, в простом гармоническом колебании ускорение всегда направлено к центру колебания и равно расстоянию от этого центра, умноженному на $4\pi^2 n^2$, и если масса колеблющейся точки есть P, то сила, действующая на нее на расстоянии x от точки O, есть $4\pi^2 n^2 Px$.

Отсюда следует, что на тело, совершающее простые гармонические колебания по прямой линии, действует сила, изменяющаяся пропорционально расстоянию от центра колебания, и значение этой силы на данном расстоянии зависит только от этого расстояния, от массы тела и от квадрата числа колебаний в единицу времени и не зависит от амплитуды колебаний.

118. Изохронные колебания. Отсюда следует, что если тело движется по прямой линии и на него действует сила, направленная к неподвижной точке на этой линии и изменяющаяся пропорционально

расстоянию от этой точки, то оно будет совершать простые гармонические колебания, период которых будет одинаков, какова бы ни была амплитуда колебания.

Если для особого рода перемещения тела, например, для тела, вращающегося вокруг оси, сила, которая стремится вернуть его в данное положение, изменяется пропорционально перемещению, то тело будет совершать простые гармонические колебания около этого положения, период которых не будет зависеть от их амплитуды.

Такого рода колебания, которые совершаются в одно и то же время, какова бы ни была их амплитуда, называются *изохронными* колебаниями.

119. Потенциальная энергия колеблющегося тела. Скорость тела в тот момент, когда оно проходит через точку равновесия, равна скорости тела, движущегося по окружности, или

$$V = 2\pi rn,$$

где r есть амплитуда колебания, а n — число полных колебаний в секунду.

Отсюда кинетическая энергия колеблющегося тела в момент прохождения через точку равновесия есть

$$\frac{1}{2}MV^2 = 2\pi^2 Mr^2n^2,$$

где M есть масса тела.

В момент наибольшего удаления, когда $x = r$, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия тела есть нуль. Убыль кинетической энергии должна быть равна приращению потенциальной энергии. Отсюда, если вычислять потенциальную энергию относительно конфигурации, в которой тело находится в равновесии, то его потенциальная энергия в момент, когда оно находится на расстоянии r от этой точки, есть $2\pi^2 Mn^2r^2$.

Это есть потенциальная энергия изохронно колеблющегося тела, совершающего n полных колебаний в секунду, если оно находится в покое на расстоянии r от точки равновесия. Так как потенциальная энергия не зависит от движения тела, а только от его положения, то можно записать ее в виде

$$2\pi^2 Mn^2x^2,$$

где x есть расстояние от точки равновесия.

120. Простой маятник. Простой маятник состоит из небольшого тяжелого тела, называемого чечевицей, подвешенного к неподвижной точке на тонкой нити неизменной длины. Чечевица предполагается столь малой, что ее движение можно рассматривать как движение материальной точки, а нить предполагается столь тонкой, что можно пренебречь ее массой и весом. Чечевица приводится в движение таким образом, что она качается в вертикальной плоскости, описывая небольшую дугу. Ее траектория есть дуга окружности, центр которой есть точка подвеса O, а радиус есть длина нити, которую мы будем обозначать через l.

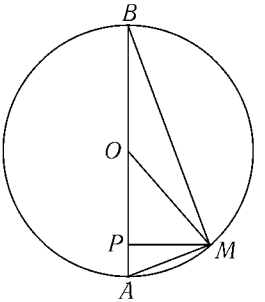


Рис. 12

Пусть O (рис. 12) есть точка подвеса, а OA — положение маятника, когда он висит вертикально. Когда чечевица находится в M, она выше, чем в положении A на высоту $AP = \frac{AM^2}{AB}$, где AM есть хорда дуги AM, а $AB = 2l$.

Если M — масса чечевицы, а g есть напряжение силы тяжести, то вес чечевицы будет Mg, а работа, произведенная против силы тяжести при движении чечевицы из точки A в точку M, будет $Mg \cdot AP$. Такова же, следовательно, и потенциальная энергия маятника, когда чечевица находится в M, если считать, что энергия есть нуль, когда чечевица находится в точке A.

Мы можем записать величину потенциальной энергии и в следующем виде:

$$\frac{Mg}{2l} \cdot AM^2.$$

Потенциальная энергия чечевицы, смещенной на какую-нибудь дугу, изменяется пропорционально квадрату хорды этой дуги.

Если бы она изменялась пропорционально квадрату самой дуги, по которой движется чечевица, то колебания были бы строго изохронными. Так как потенциальная энергия изменяется медленнее, чем квадрат дуги, то период каждого колебания будет больше, если амплитуда больше.

Однако для очень малых колебаний мы можем пренебречь различием между хордой и дугой и, обозначая дугу через x, можем положить потенциальную энергию равной

$$\frac{Mg}{2l} x^2.$$

Но мы уже показали, что в гармонических колебаниях потенциальная энергия есть $2\pi^2 M n^2 x^2$.

Приравнивая друг другу эти два выражения и освободившись от дробей, получим

$$g = 4\pi^2 n^2 l,$$

где g есть напряжение силы тяжести, π — отношение длины окружности к ее диаметру, n — число колебаний маятника в единицу времени, а l — длина маятника.

121. Физический маятник. Если бы можно было построить маятник со столь малой чечевицей и столь тонкой нитью, что его можно было бы для практических целей рассматривать как простой маятник, то этим способом было бы нетрудно определить g.

Но все действительные маятники имеют чечевицы значительных размеров, и для того, чтобы сохранить длину неизменной, чечевица должна быть соединена с точкой подвеса крепким стержнем, массой которого нельзя пренебречь. Всегда, однако, возможно определить длину простого маятника, колебания которого совершались бы таким же образом, как колебания маятника любой формы.

Полное рассмотрение этого предмета привело бы к вычислениям, лежащим за пределами этого трактата. Можно, однако, прийти к самому важному результату без вычислений, с помощью нижеследующих соображений.

Движение твердого тела в одной плоскости может быть полностью определено, если указать движение его центра массы и движение тела относительно его центра массы.

Сила, требующаяся для того, чтобы произвести данное изменение в движении центра массы, зависит только от массы тела (§ 63).

Момент, требующийся для того, чтобы произвести данное изменение угловой скорости относительно центра массы, зависит от распределения массы; он тем больше, чем дальше различные части тела отстоят от центра массы.

Поэтому, если образовать систему двух частиц, неизменно связанных между собою, причем сумма их масс равна массе маятника, их центр массы совпадает с центром массы маятника, а их расстояния от центра массы таковы, что требуется пара одного и того же момента, чтобы произвести данное вращательное движение около центра масс новой системы и около центра массы маятника, то новая система будет

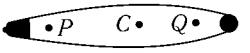


Рис. 13

для движения в определенной плоскости динамически эквивалентна данному маятнику, то есть, если обе системы движутся одинаковым образом, то силы, требующиеся для того, чтобы управлять движением, будут равны. Так как массы обеих частиц могут находиться в каком угодно отношении между собой, при условии, что их сумма равна массе маятника, и так как прямая, их соединяющая, может иметь любое направление, при условии, что она проходит через центр массы, то можно расположить их таким образом, чтобы одна из частиц соответствовала любой данной точке маятника, например, точке привеса P (рис. 13). Масса этой частицы и положение и масса другой частицы Q этим определится. Положение второй частицы Q называется *центром качания*. Если теперь в системе двух частиц одна из них, P, неподвижно укреплена, а другая, Q, может колебаться под действием силы тяжести, то мы имеем простой маятник, ибо одна из частиц, P, действует как точка привеса, а другая, Q, находится на неизменном от нее расстоянии, так что связь между ними такова же, как если бы они были соединены нитью длины $l = PQ$.

Следовательно, маятник любой формы качается точно таким же образом, как простой маятник, длина которого есть расстояние от точки привеса до центра качания.

122. Оборотный маятник. Предположим теперь, что система двух частиц обращена, причем точка Q стала точкой привеса, а частица P совершает качания. Мы имеем теперь простой маятник той же длины, что и раньше, и его качания будут совершаться в такое же время. Но он динамически эквивалентен маятнику, подвешенному в центре качания.

Итак, если маятник обращен и подвешен в центре качания, то его колебания будут иметь тот же самый период, что и раньше, и расстояние между точкой привеса и центром качания будет равно длине простого маятника, имеющего такое же время колебания.

Именно этим путем определил капитан *Кэтер* длину простого маятника, отбивающего секунды.

Он построил маятник, который можно заставить качаться около двух остриев, находящихся в противоположных сторонах от центра массы и на *неравных* от него расстояниях.

Постепенным прилаживанием он сделал время качания одинаковым, независимо от того, какое острие служит точкой привеса. Длина

соответствующего простого маятника была затем найдена измерением расстояния между остриями.

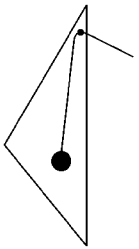


Рис. 14

123. Иллюстрация маятника Кэтера. Принцип маятника *Кэтера* можно иллюстрировать очень простым и поразительным опытом. Возьмем плоскую дощечку произвольной формы (рис. 14), проткнем сквозь нее, вблизи ее края, кусок проволоки и подвесим ее в вертикальной плоскости, держа концы проволоки указательным и большим пальцем. Возьмем маленький шарик, привяжем его к концу нити, а нить пропустим над проволокой так, чтобы шарик висел, плотно прилегая к доске. Проведем рукой, которой мы держим проволоку, горизонтально в плоскости доски и заметим, опережает ли доска шарик или отстает от него. Если опережает, то удлиним нить, если же отстает, укоротим ее до тех пор, пока шарик и доска не будут двигаться вместе. Теперь отметим ту точку доски, которая совпадает с центром шарика, и прикрепим нить к проволоке. Мы убедимся, что если держать проволоку за концы и двигать ею как угодно, хотя бы внезапно и неправильно, в плоскости доски, то шарик никогда не оставит отмеченного места на доске.

Это место называется центром качания потому, что если доска качается около неподвижной проволоки, то она качается так, как если бы она состояла из одной частицы, помещенной в этой точке.

Его называют также центром удара, потому что, если доска находится в покое и если внезапно двинуть горизонтально проволоку, то доска прежде всего начнет вращаться около этой точки, как центра.

124. Определение напряжения силы тяжести. Самый прямой способ определения g состоит в наблюдении падения тела и определении того, какую скорость оно приобретет через секунду; но очень трудно производить точные наблюдения над движением тел, когда их скорости имеют такую величину, как 981 сантиметр в секунду, и, кроме того, опыт следовало бы произвести в сосуде, из которого выкачан воздух, так как сопротивление воздуха столь быстрому движению очень значительно, сравнительно с весом падающего тела.

Опыт с маятником гораздо более удовлетворителен. Если сделать дугу качания очень малой, то движение чечевицы становится столь медленным, что сопротивление воздуха может оказать лишь очень ма-

лое влияние на время колебания. В наилучших опытах маятник качается в сосуде, из которого воздух удален насосом.

Кроме того, в этом случае движение почти совершенно периодично, и маятник качается вперед и назад сотни или даже тысячи раз, раньше чем различные сопротивления, которым он подвержен, уменьшат амплитуду колебаний настолько, что их нельзя будет более наблюдать.

Таким образом, действительное наблюдение состоит не в том, чтобы отметить начало и конец одного качания, но в определении продолжительности многих сотен качаний и вычислении отсюда времени одного качания.

Благодаря описанному ниже методу наблюдатель избавляется от необходимости считать качания по одному, и измерение делается одним из самых точных во всей области опытных наук.

125. Метод наблюдения. За маятником, служащим для опыта, помещают часы с маятником таким образом, чтобы, когда оба маятника висят вертикально, чечевица, или какая-нибудь другая часть служащего для опыта маятника, закрывала белое пятно на маятнике часов, если смотреть в подзорную трубку, укрепленную на некотором расстоянии впереди часов.

Время от времени производят наблюдения над прохождением через меридиан «часовых звезд», и из этих наблюдений выводят быстроту хода часов в единицах среднего солнечного времени.

Затем сообщают колебания служащему для опыта маятнику и наблюдают оба маятника в подзорную трубку. Предположим, что время одного качания не равно в точности периоду качания маятника часов, но немного больше его.

Наблюдатель видит в подзорную трубку, что маятник часов все более опережает изучаемый маятник до тех пор, пока этот последний не закроет как раз белого пятна на маятнике часов, когда он проходит через вертикальную линию. То время, когда это происходит, наблюдают и записывают как *первое положительное совпадение.*

Маятник часов продолжает опережать другой, и через некоторое время оба маятника проходят через вертикальную линию в противоположных направлениях. Этот момент отмечается как *первое отрицательное совпадение.* Через равный промежуток времени произойдет второе положительное совпадение и т. д.

При этом методе часы сами считают число N качаний их собственного маятника между совпадениями. В течение этого времени изучаемый маятник совершил одним качанием меньше, чем часовой. Отсюда время качания изучаемого маятника есть $\frac{N}{N-1}$ секунд времени, показываемого часами.

Если нет точного совпадения, но часовой маятник находится впереди изучаемого, при одном прохождении через вертикаль, и позади его — при следующем, то небольшой навык со стороны наблюдателя научит его оценивать, в какой момент между прохождениями оба маятника должны были быть в одинаковой фазе. Момент совпадения можно оценить таким образом с точностью до доли секунды.

126. Оценка ошибки. Так как маятник может качаться в течение нескольких часов, то полное время, подлежащее измерению, может содержать десять тысяч и более качаний.

Но погрешность, введенная в вычисленное время качания вследствие ошибки даже на целую секунду в определении момента совпадения, может быть сделана чрезвычайно малой, если опыт длится достаточно долгое время.

В самом деле, если мы заметим первое и n-е совпадение и найдем, что они отделены промежутком в N секунд, отбиваемых часами, то экспериментальный маятник потеряет n качаний, по сравнению с часовым, и сделает $N-n$ качаний в N секунд. Отсюда время одного качания $\frac{N}{N-n}$ секунд времени, показываемого часами.

Допустим, однако, что мы записали, что последнее совпадение произошло через $N+1$ секунду после первого. Значение T, выведенное при этом предположении, было бы

$$T' = \frac{N+1}{N+1-n},$$

и погрешность, вызванная ошибкой на одну секунду, будет

$$T' - T = \frac{N+1}{N+1-n} - \frac{N}{N-n} = -\frac{n}{(N+1-n)(N-n)}.$$

Если N есть 10 000, а n есть 100, то ошибка в одну секунду в определении момента совпадения изменит величину T приблизительно только на одну миллионную долю ее значения.

Глава 8
Всемирное тяготение

127. Метод Ньютона. Самый поучительный пример метода динамического рассуждения представляет тот метод, с помощью которого *Ньютон* определил силу взаимодействия небесных тел.

Процесс динамического рассуждения состоит, в выводе из последовательных конфигураций небесных тел, как они наблюдаются астрономами, их скоростей и ускорений и в определении этим путем направления и относительной величины действующих на них сил.

Кеплер уже расчистил путь для исследования *Ньютона* тем, что вывел из тщательного изучения наблюдений *Тихо Браге* три закона планетных движений, носящие его имя.

128. Законы Кеплера. Законы *Кеплера* носят чисто кинематический характер. Они полностью описывают движения планет, но они ничего не говорят о силах, которыми определяются эти движения.

Их динамическое истолкование было открыто *Ньютоном.*

Первый и второй законы относятся к движению одной планеты.

Закон I. — Площади, описываемые вектором, проведенным от солнца к планете, пропорциональны временам, в течение которых они описаны. — Если h обозначает удвоенную площадь, описываемую в единицу времени, то удвоенная площадь, описанная во время t, будет ht, и если P есть масса планеты, то Pht будет масса-площадь, согласно определению § 68. Отсюда момент количества движения планеты около солнца, который представляет собою скорость изменения массы-площади, будет Ph, величина постоянная.

Следовательно, по § 70, если существует сила, которая действует на планету, то она не должна иметь момента относительно солнца, ибо, в противном случае, этот момент увеличивал или уменьшал бы момент количества движения со скоростью, измеряемой значением момента силы.

Отсюда, какова бы ни была сила, действующая на планету, направление этой силы должно всегда проходить через солнце.

129. Угловая скорость. *Определение.* Угловая скорость вектора есть скорость, с которой возрастает угол, образуемый им с неподвижным вектором, проведенным в плоскости его движения.

Если ω есть угловая скорость вектора, а r — его длина, то скорость, с которой он описывает площадь, есть $\frac{1}{2}\omega r^2$, откуда

$$h = \omega r^2,$$

а так как h постоянно, то ω, угловая скорость движения планеты около солнца, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от солнца.

Это верно, каков бы ни был закон силы, при условии, что сила, действующая на планету, всегда проходит через солнце.

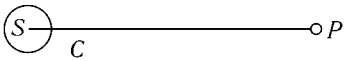


Рис. 15

130. Движение около центра масс. Так как напряжение, существующее между планетой и солнцем, действует на оба тела, то ни одно из них не может оставаться в покое. Единственная точка, на движение которой это напряжение не оказывает влияния, есть центр масс обоих тел.

Если r есть расстояние SP (рис. 15), а C есть центр масс, то $SC = \frac{Pr}{S+P}$ и $CP = \frac{Sr}{S+P}$. Момент количества движения планеты P около C есть $P\omega\frac{S^2r^2}{(S+P)^2} = \frac{PS^2h}{(S+P)^2}$.

131. Орбита. Нам уже приходилось пользоваться диаграммами конфигурации и скорости при изучении движения материальной системы. Но эти диаграммы изображают только состояние системы в данный момент, причем это состояние указывается относительным положением точек, соответствующих составляющим систему телам.

Однако же часто представляется удобным изобразить на одной диаграмме весь ряд конфигураций или скоростей, которые система принимает. Если мы предположим, что точки диаграммы движутся таким образом, что они непрерывно изображают состояние системы, то каждая точка диаграммы опишет линию, прямую или кривую.

На диаграмме конфигурации такая линия называется *траекторией* тела. В случае небесных тел она часто называется *орбитой*.

132. Годограф. На диаграмме скоростей линия, описываемая каждой движущейся точкой, называется *годографом* тела, которому она соответствует.

Изучение годографа, как метод исследования движения тела, было введено *В. Р. Гамильтоном.* Годограф может быть определен как траектория, описанная концом вектора, который непрерывно представляет по направлению и величине скорость движущегося тела.

Применяя метод годографа к планете, орбита которой лежит в одной плоскости, мы ради удобства предположим, что годограф повернут около начала на прямой угол, так что вектор годографа перпендикулярен к скорости, которую он изображает, вместо того чтобы быть ей параллельным.

133. Второй закон Кеплера. *Закон* II. — Орбита планеты относительно солнца есть эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце.

Пусть $APQB$ (рис. 16) — эллиптическая орбита. Пусть S будет солнце, находящееся в одном фокусе, и пусть H — другой фокус. Продолжим прямую SP до точки U, так чтобы отрезок SU равнялся большой оси AB, и соединим точки H и U; тогда HU будет пропорциональна и перпендикулярна скорости планеты P.

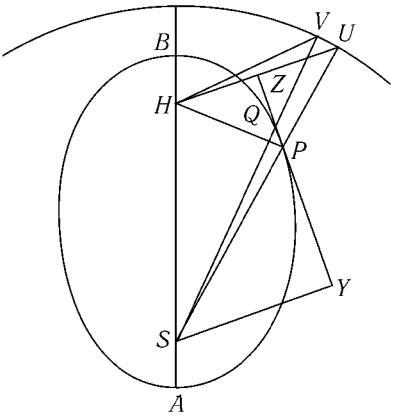


Рис. 16

В самом деле, разделим HU пополам в точке Z и соединим точки Z и P; линия ZP будет касательной к эллипсу в точке P; пусть SY будет перпендикуляр, опущенный на эту касательную из точки S.

Если v есть скорость планеты в точке P, а h есть удвоенная площадь, описываемая в единицу времени, то $h = v \cdot SY$.

Кроме того, если b есть половина малой оси эллипса, то

$$SY \cdot HZ = b^2.$$

Теперь,

$$HU = 2HZ,$$

откуда

$$v = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}HU.$$

Итак, линия HU всегда пропорциональна скорости и перпендикулярна к ее направлению. Но линия SU всегда равна AB. Следовательно, окружность, центр которой S и радиус которой — AB, есть годограф планеты, причем точка H есть начало годографа.

Соответствующими точками орбиты и годографа являются те, которые лежат на одной прямой линии, проходящей через точку S.

Так, P соответствует точке U, а Q — точке V.

Скорость, сообщенная телу за время его перемещения из P в Q, изображается геометрической разностью векторов HU и HV, то есть линией UV, и эта скорость перпендикулярна соответствующей дуге окружности, а потому, как мы уже доказали, направлена к S.

Если PQ есть дуга, описанная в течение очень малого времени, то UV изображает изменение скорости, приобретенное за это время; а так как UV есть дуга окружности, центр которой есть точка S, то дуга UV будет мерой углового перемещения планеты относительно S в течение этого времени. Значит, ускорение пропорционально угловой скорости, но эта последняя, по § 129, обратно пропорциональна квадрату расстояния SP. Следовательно, ускорение планеты направлено к солнцу и изменяется обратно пропорционально расстоянию от солнца.

Таков закон, по которому изменяется притяжение солнца, действующее на планету, когда планета движется по своей орбите и изменяет свое расстояние от солнца.

134. Сила, действующая на планету. Как мы уже показали, орбита планеты относительно центра масс солнца и планеты имеет размеры, относящиеся к размерам орбиты планеты относительно солнца, как S к $S + P$.

Если $2a$ и $2b$ суть оси орбиты планеты относительно солнца, то площадь ее есть πab, и если T есть время полного обращения по орбите, то значение величины h есть $2\pi\frac{ab}{T}$. Следовательно, скорость относительно солнца есть $\pi\frac{a}{Tb}HU$.

Скорость относительно центра масс есть

$$\frac{S}{S+P}\frac{\pi a}{Tb}HU.$$

Изменение скорости планеты относительно центра масс [при прохождении дуги PQ] есть

$$\frac{S}{S+P}\frac{\pi a}{Tb}UV,$$

а импульс, действующий на планету, масса которой есть P, равен

$$\frac{SP}{S+P}\frac{\pi a}{Tb}UV.$$

Пусть t есть время, в течение которого описана дуга PQ; тогда удвоенная площадь SPQ есть

$$ht = \omega r^2 t$$

и

$$UV = 2a\omega t = 2a\frac{h}{r^2}t = 4\pi\frac{a^2 b}{Tr^2}t.$$

Отсюда сила, действующая на планету [импульс, разделенный на время], есть

$$F = 4\pi^2\frac{SP}{S+P}\frac{a^3}{T^2 r^2}.$$

Такова величина напряжения или притяжения между планетой и солнцем, выраженная через их массы P и S, их среднее расстояние a, их действительное расстояние r и период T.

135. Интерпретация третьего закона Кеплера. Для того чтобы сравнить притяжения между солнцем и различными планетами, *Ньютон* воспользовался третьим законом *Кеплера.*

Закон III. — Квадраты времен обращения различных планет пропорциональны кубам их средних расстояний от солнца. Другими словами, $\frac{a^3}{T^2}$ есть постоянная величина, положим, $\frac{c}{4\pi^2}$.

Отсюда

$$F = c\frac{SP}{S+P}\frac{1}{r^2}.$$

В случае меньших планет, их массы столь малы в сравнении с массой солнца, что $\frac{S}{S+P}$ можно положить равным единице, так что $F = c\frac{P}{r^2}$, т. е. притяжение, действующее на планету, пропорционально ее массе и обратно пропорционально квадрату ее расстояния от солнца.

136. Закон тяготения. Самый замечательный факт в явлении тяготения состоит в том, что на одном и том же расстоянии оно одинаково действует на равные массы вещества всех видов. Это доказано опытами над маятником для различных видов материи на поверхности земли. *Ньютон* распространил этот закон на материю, из которой состоят различные планеты.

Еще до того как *Ньютон* это доказал, догадывались, что солнце, как целое, притягивает планету, как целое, и даже закон обратной пропорциональности квадрату расстояний был уже предложен ранее, но только в руках *Ньютона* учение о тяготении приняло свою окончательную форму.

Всякая часть материи притягивает всякую другую часть материи, и напряжение между ними пропорционально произведению их масс, разделенному на квадрат их расстояния.

В самом деле, если сила притяжения между граммом материи на солнце и граммом материи на планете, на расстоянии r, есть $\frac{c}{r^2}$, где C — постоянная, и если в массе солнца содержится S, а в массе планеты P граммов, то полное притяжение между солнцем и одним граммом на планете будет $\frac{CS}{r^2}$, а полное притяжение между солнцем и планетой будет $C\frac{SP}{r^2}$.

Сравнивая это выражение «закона всемирного тяготения» *Ньютона* с полученным ранее значением P, найдем

$$C\frac{SP}{r^2} = 4\pi^2\frac{SP}{S+P}\frac{a^3}{T^2r^2},$$

или

$$4\pi^2a^3 = C(S+P)T^2.$$

137. Третий закон Кеплера в исправленном виде. Итак, третий закон *Кеплера* должен быть исправлен следующим образом:

Кубы средних расстояний относятся, как квадраты времен обращения, помноженные на сумму масс солнца и планеты.

В случае больших планет Юпитера, Сатурна и т. д. величина суммы $S+P$ значительно больше, чем для земли и меньших планет. Значит, времена обращения больших планет должны быть несколько меньше, чем по закону *Кеплера*, и это оказалось в действительности справедливым.

В следующей таблице даны средние расстояния (a) планет в единицах среднего расстояния земли и времена обращения (T) в звездных годах:

Планета	a	T	a^3	T^2	$a^3 - T^2$
Меркурий	$0,387098$	$0,24084$	$0,0580046$	$0,0580049$	$-0,0000003$
Венера	$0,72333$	$0,61518$	$0,378451$	$0,378453$	$-0,000002$
Земля	$1,0000$	$1,00000$	$1,00000$	$1,00000$	
Марс	$1,52369$	$1,88082$	$3,53746$	$3,53747$	$-0,00001$
Юпитер	$5,20278$	$11,8618$	$140,832$	$140,701$	$0,131$
Сатурн	$9,53879$	$29,4560$	$867,914$	$867,658$	$0,256$
Уран	$19,1824$	$84,0123$	$7058,44$	$7058,07$	$0,37$
Нептун	$30,037$	$164,616$	$27100,0$	$27098,4$	$1,6$

Из этой таблицы видно, что третий закон *Кеплера* дает очень большое приближение, так как a^3 незначительно отличается от T^2, но для тех планет, масса которых меньше массы земли, именно, Меркурия, Венеры и Марса, a^3 меньше T^2, между тем как для Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, масса которых больше массы земли, a^3 больше, чем T^2.

138. Потенциальная энергия, обусловленная тяготением. Потенциальная энергия тяготения между телами S и P может быть вычислена, если мы знаем зависимость притяжения между ними от их расстояния. Процесс вычисления, посредством которого мы суммируем влияния непрерывно изменяющейся величины, относится к интегральному исчислению, и, хотя в настоящем случае вычисление может быть произведено элементарными методами, мы предпочтем вывести потенциальную энергию непосредственно из первого и второго законов *Кеплера*.

Эти законы вполне определяют движение солнца и планеты, а потому мы можем определить кинетическую энергию системы, соответствующую любой части эллиптической орбиты. Но так как солнце и планета образуют консервативную систему, то сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна, и следовательно, если мы знаем кинетическую энергию, то можем вывести ту часть потенциальной энергии, которая зависит от расстояния между телами.

139. Кинетическая энергия системы. Для того чтобы определить кинетическую энергию, заметим, что по § 133 скорость планеты

относительно солнца

$$v = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}HU.$$

Скорости планеты и солнца относительно центра масс системы равны соответственно

$$\frac{S}{S+P}v \quad \text{и} \quad \frac{P}{S+P}v.$$

Кинетические энергии планеты и солнца равны, поэтому,

$$\frac{1}{2}P\frac{S^2}{(S+P)^2}v^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}S\frac{P^2}{(S+P)^2}v^2,$$

а полная кинетическая энергия есть

$$\frac{1}{2}\frac{SP}{S+P}v^2 = \frac{1}{8}\frac{SP}{S+P}\frac{h^2}{b^4}HU^2.$$

Чтобы определить проще всего v^2 через SP или r, заметим, что по закону площадей

$$v \cdot SY = h = \frac{2\pi ab}{T}; \tag{1}$$

кроме того, по свойству эллипса

$$HZ \cdot SY = b^2, \tag{2}$$

а из подобия треугольников HZP и SYP

$$\frac{SY}{HZ} = \frac{SP}{HP} = \frac{r}{2a-r}. \tag{3}$$

Перемножая уравнения (2) и (3), получаем

$$SY^2 = \frac{b^2 r}{2a-r}.$$

Отсюда, с помощью уравнения (1), находим

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\frac{1}{SY^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}\left(\frac{2a}{r} - 1\right),$$

и кинетическая энергия системы есть

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{SP}{S+P}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right).$$

В силу уравнения, выведенного в конце § 136, последнее выражение обращается в

$$C\cdot SP\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right),$$

где C есть постоянная тяготения.

Такова величина кинетической энергии двух тел S и P, движущихся друг относительно друга по эллипсу, большая ось которого есть $2a$.

140. Потенциальная энергия системы. Сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна, но абсолютное ее значение, согласно § 110, неизвестно, и нет необходимости его знать.

Отсюда, если мы заключим [в согласии с постоянством полной энергии], что выражение потенциальной энергии имеет вид

$$K-C\cdot SP\frac{1}{r},$$

то второй член, единственный зависящий от расстояния r, есть также единственный, с которым нам приходится иметь дело. Другой член K представляет работу, произведенную тяготением, когда два тела, разделенные первоначально бесконечно большим расстоянием, сближаются настолько, насколько это допускают их размеры.

141. Луна — тяжелое тело. Определив, таким образом, закон силы, действующей между каждой планетой и солнцем, *Ньютон* взялся показать, что наблюдаемый вес тел на поверхности земли и сила, которая удерживает луну на ее орбите вокруг земли, относятся между собой согласно тому же закону обратной пропорциональности квадрату расстояния.

Эта сила тяжести действует в каждом доступном нам месте на вершине высочайших гор и в самой высокой точке, доступной на аэростате. Ее напряжение, измеренное посредством опытов над маятником, убывает по мере того, как мы поднимаемся; и хотя высота, до которой мы можем подняться, столь мала, в сравнении с радиусом земли, что

из такого рода наблюдений нельзя вывести, что сила тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра земли, однако наблюдаемое уменьшение напряжения силы тяжести согласно с этим законом, вид которого был подсказан *Ньютону* движением планет.

Допустив, что напряжение силы тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра земли, и зная его значение на поверхности земли, *Ньютон* вычислил его значение на среднем расстоянии луны.

Его первые вычисления были испорчены допущением ошибочной оценки размеров земли. Когда же он получил более точное значение этой величины*, он нашел, что напряжение силы тяжести, вычисленное для расстояния, равного расстоянию луны, равно силе, требующейся для того, чтобы удержать луну на ее орбите.

Таким образом он отождествил силу, действующую между землей и луной, с той силой, которая заставляет тела вблизи земной поверхности падать на землю.

142. Опыт Кэвендиша. После того как было показано, что сила, с которой притягивают друг друга небесные тела, однородна с силой притяжения к земле доступных нам тел, оставалось еще показать, что эти тела притягивают друг друга.

Трудность этой задачи заключается в том обстоятельстве, что масса тел, с которыми мы можем работать, столь мала по сравнению с массой земли, что если даже привести два тела в наибольшую возможную близость, сила притяжения между ними будет чрезвычайно малой дробью веса каждого из них.

Мы не можем освободиться от притяжения земли, но можем поставить опыт таким образом, чтобы оно возможно меньше препятствовало наблюдать притяжение другого тела.

Достопочтенный Джон Мичелл (John Michell)** изобрел для этой цели прибор, который получил с тех пор название *крутильных весов. Мичелл* умер, не успевши произвести этот опыт, но его прибор

---

*И доказал с большой математической строгостью допущенное выше предложение, что притяжение такого шара, как земля, на все внешние точки таково же точно, как если бы его масса была сосредоточена в его центре.

**В Queen's College, Cambridge, Вудвардианский профессор геологии, 1762–4. См. Мемуар сэра *A. Geikie*, Cambridge, 1918.

попал впоследствии в руки *Генри Кэвендиша* (Henry Cavendish*), который улучшил его во многих отношениях и измерил притяжение между [неподвижными] свинцовыми шарами и маленькими шариками, подвешенными на стержне весов. Подобный же прибор был независимо изобретен впоследствии *Кулоном* для измерения малых электрических и магнитных сил и продолжает оставаться лучшим известным науке инструментом для измерения малых сил всех родов.

143. Крутильные весы**. Крутильные весы состоят из горизонтального стержня, подвешенного на проволоке к неподвижной опоре. Когда стержень повернут внешней силой в горизонтальной плоскости, то он закручивает проволоку, а так как проволока упруга, то она стремится оказать сопротивление этой деформации и раскрутиться. Эта сила кручения пропорциональна углу, на который закручена проволока, так что, если мы заставим силу действовать в горизонтальном направлении на конец стержня под прямым углом к нему, то сумеем, наблюдая угол, на который сила повернет стержень, определить величину этой силы.

Сила пропорциональна углу кручения и четвертой степени диаметра проволоки и обратно пропорциональна длине стержня и длине проволоки.

Следовательно, пользуясь длинной тонкой проволокой и длинным стержнем, мы можем измерять очень малые силы.

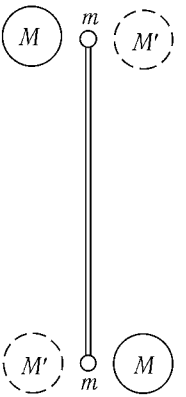


Рис. 17

В опыте *Кэвендиша* на концах стержня крутильных весов укреплены два шара равной массы[1] m. Мы будем на этот раз пренебрегать массой стержня по сравнению с массой шаров. Два бóльших шара равной массы M приспособляются таким образом, что могут быть помещены как в положении M и M, так и в положении M' и M'. В первом положении они стремятся своим притяжением меньших шаров, m и m, повернуть стержень весов по направлению к себе. В другом положении они стремятся повернуть его в противоположном направлении. Крутильные весы вместе с подвешенными шара-

*В Peterhouse, в Кембридже. См. его Scientific Writings, 2 тома, Cambridge, 1920.

**См. *ниже*, приложение I, примеч. к § 145.

[1]Рис. 17 изображает вид сверху. — *Н. А.*

ми заключаются в ящик для того, чтобы избежать влияния воздушных течений. Положение стержня весов определяется наблюдением отражения градуированной шкалы в вертикальном зеркале, прикрепленном в середине стержня. Весы помещаются в отдельной комнате, в которую наблюдатель не входит, но наблюдает отражение шкалы в подзорную трубку.

144. Постановка опыта. Прежде всего определяют время T полного колебания крутильных весов, а также положение равновесия центров подвешенных шаров.

Затем приводят большие шары в положения M, M, так чтобы центр каждого из них находился на некотором расстоянии от положения равновесия центра подвешенного шара.

Рис. 18

Остановки колебания стержня не ожидают, но наблюдают деления шкалы, соответствующие крайним положениям одного колебания; пусть найдено, что они отстоят на расстояниях x и y от положения равновесия. В этих точках стержень остается в течение одного мгновения в покое, так что вся его энергия есть потенциальная, а так как полная энергия постоянна, то потенциальная энергия, соответствующая положению x, должна быть равна потенциальной энергии, соответствующей положению y.

Если T есть время полного колебания около точки равновесия O, то потенциальная энергия, обусловленная закручиванием, когда отсчет шкалы есть x, согласно § 119, равна

$$\frac{2\pi^2 m}{T^2}x^2,$$

а потенциальная энергия, происходящая от притяжения между массами m и M, по § 140, равна

$$K - C\frac{mM}{a-x}.$$

Следовательно, потенциальная энергия всей системы в положении x есть

$$K - C\frac{mM}{a-x} + \frac{2\pi^2 m}{T^2}x^2.$$

Потенциальная энергия в положении y есть

$$K - C\frac{mM}{a-y} + \frac{2\pi^2 m}{T^2}y^2,$$

а так как потенциальные энергии в обоих положениях равны, то

$$CmM\left(\frac{1}{a-y} - \frac{1}{a-x}\right) = \frac{2\pi^2 m}{T^2}(y^2 - x^2),$$

откуда

$$C = \frac{2\pi^2}{MT^2}(x+y)(a-x)(a-y).$$

Это равенство определяет постоянную тяготения C через наблюденные величины: массу M больших шаров, выраженную в граммах, время T полного колебания, в секундах, и расстояния x, y и a, в сантиметрах.

Согласно опытам *Байли* (Baily), $C = 6{,}5 \cdot 10^{-8}$. Если выберем единицу массы таким образом, чтобы на единице расстояния она сообщала ускорение, равное единице, причем за единицы приняты сантиметр и секунда, то единица массы равнялась бы $1{,}537 \cdot 10^7$ граммам или 15,37 тоннам. При этой единице массы постоянная тяготения C сводится к единице. Поэтому ею пользуются в физической астрономии.

145. Всемирное тяготение. Итак, мы обнаружили силу тяготения во многих явлениях природы и нашли, что закон, установленный для изменения силы, действующей на различных расстояниях между планетой и солнцем, сохраняется и в том случае, когда мы сравниваем притяжение между различными планетами и солнцем, а также и тогда, когда мы сравниваем притяжение между луной и землей с притяжением между землей и тяжелыми телами на ее поверхности. Мы нашли также, что притяжение равных масс на равных расстояниях одинаково, какова бы ни была природа материала, из которого состоят эти массы. Это мы устанавливаем из опытов над маятниками из различных веществ, а также из сравнения притяжения солнцем различных планет, которые, вероятно, не одинаковы по составу. Опыты *Байли** над

*И более современные опыты, выполненные с крайней утонченностью *Джолли* (Jolly), *Бойсом* (Boys), *Этвёсом* (Eötvös) и многими другими. Наблюдаемый вес есть тяжесть, уменьшенная на центробежную реакцию вращению земли; если бы они неодинаково изменялись для всех видов материи, то точные взвешивания открыли бы разницу: опыты Этвёса показывают, что она не может превышать дроби $5 \cdot 10^{-8}$. См. *ниже*, конец приложения I.

шарами из различных веществ, помещенными на крутильных весах, подтверждают этот закон.

Так как мы нашли в таком большом числе случаев, относящихся к отдаленным между собою областям, что сила тяготения зависит только от массы тел, а не от их химической природы и физического состояния, то приходим к заключению, что это справедливо для всех веществ.

Например, ни один ученый не сомневается, что две части атмосферного воздуха взаимно притягиваются, хотя мы питаем весьма слабую надежду, что когда-нибудь будут изобретены достаточно точные экспериментальные методы для того, чтобы измерить или даже только сделать заметным это притяжение. Но мы знаем, что существует притяжение между любой частью воздуха и землей, а из опыта *Кэвендиша* мы убеждаемся, что весомые тела, если они имеют достаточную массу, заметно тяготеют друг к другу, и отсюда мы заключаем, что две части воздуха притягиваются между собой. Однако все еще крайне сомнительно, обладает ли тяготением среда, передающая свет и электричество, хотя она, без сомнения, материальна и обладает массой*.

146. Причина тяготения. Ньютон в своих *Началах* выводит из наблюдаемых движений небесных тел тот факт, что они притягивают друг друга по определенному закону.

Он приходит к этому выводу в результате строгого динамического рассуждения, показывая этим, что не только те явления, которые более бросаются в глаза, но и все видимые неправильности в движениях этих тел являются поддающимися вычислению результатами одного этого принципа. В своих *Началах* он ограничивается доказательством и развитием этого великого шага в науке о взаимодействиях тел. Но он ничего не говорит о способе, которым тела друг друга притягивают. Мы знаем, что его ум не успокоился на этой точке, что он чувствовал, что само тяготение нуждается в объяснении, и что он даже склонялся к объяснению тяготения действием проникающей пространство эфирной среды. Но с той мудрой сдержанностью, которая характерна для всех его исследований, он отличал такие умозрения от того, что он установил наблюдением и опытом, и исключил из своих *Начал* всякое упоминание о причине тяготения, приберегая свои мысли по этому предмету для «Вопросов», напечатанных в конце его *Оптики.*

---

*См. *ниже*, конец приложения I.

Попытки, которые были сделаны со времени *Ньютона* для разрешения этого трудного вопроса, немногочисленны и не привели к надежному результату*.

147. Применение ньютоновского метода исследования. Метод исследования сил, действующих между телами, который был таким образом указан *Ньютоном* и проверен им на примере небесных тел, был успешно применен *Кэвендишем, Кулоном* и *Пуассоном* и к случаю наэлектризованных и намагниченных тел.

Исследование взаимодействия мелких частиц тел более трудно, потому что эти частицы и их расстояния столь малы, что мы не можем их увидеть или измерить, а следовательно, не в состоянии наблюдать их движения, как наблюдаем движения планет или наэлектризованных и намагниченных тел[1].

148. Методы молекулярных исследований. Поэтому исследования молекулярной физики велись, по большей части, по методу построения гипотезы и сравнения ее результатов с наблюденными фактами.

Успешность этого метода зависит от общности гипотезы, из которой мы исходим. Если наша гипотеза есть крайне общее предположение, что исследуемые явления зависят от конфигурации и движения материальной системы, и если возможно вывести некоторые ценные результаты из такой гипотезы, то мы смело можем прилагать ее к изучаемым явлениям**.

С другой стороны, если мы строим гипотезу, что конфигурация, движение или действие материальной системы имеют некоторый определенный характер, и если результаты такой гипотезы согласуются с явлениями, то мы все же должны еще допустить возможность, что наша гипотеза окажется ошибочной[2], если нельзя доказать, что никакая другая гипотеза не может объяснить этих явлений.

---

*См. *ниже*, приложение I.

[1]Однако и здесь косвенные методы исследования могут привести к надежному результату. Так, вся теория спектров, развитая *Бором*, приводит нас к заключению о необычайной точности, с которою соблюдается закон *Кулона* внутри атома. — *Н. А.*

**Это предмет следующей главы.

[2]Это не так. Отсюда может следовать, что наша гипотеза не есть единственно возможная. Как указал *Пуанкаре*, все гипотезы о механизме явления, приводящие к одинаковым уравнениям, определяющим ход явления, «одинаково истинны». — *Н. А.*

149. Важность общих и элементарных свойств. Поэтому во всех физических исследованиях чрезвычайно важно основательное знакомство с самыми общими свойствами материальных систем, и именно по этой причине я в этой книге предпочел остановиться на этих общих свойствах и не входить в более разнообразное и интересное поле специальных свойств частных форм материи.

Глава 9

Об уравнениях движения системы со связями*

1. В четвертом отделе второй части своей *Аналитической механики Лагранж* дал метод для приведения обыкновенных динамических уравнений движения частей связанной системы к числу, равному числу степеней свободы этой системы.

Уравнения движения связанной системы были даны в отличной форме *Гамильтоном* и привели к большому развитию высшей части общей динамики[1].

Считая необходимым в нашем стремлении включить электрические явления в область динамики, придать нашим динамическим идеям вид, годный для непосредственного приложения к физическим вопросам, мы посвятим эту главу изложению этих динамических идей с физической точки зрения.

2. Целью *Лагранжа* было подчинить динамику власти анализа. Он начал с того, что выразил основные динамические отношения через соответствующие отношения чисто алгебраических величин, и из полученных таким образом уравнений он строго аналитически вывел свои окончательные уравнения. В уравнениях движения составных частей системы появляются некоторые величины (выражающие реакции между частями системы, вызываемые ее физическими связями), и исследование *Лагранжа*, рассматриваемое с математической точки зрения, есть метод исключения этих величин из окончательных уравнений.

Следуя по пути этого исключения, мы пользуемся вычислением, и ум наш должен поэтому оставаться свободным от вторжения динамических идей. Наша же цель заключается в том, чтобы совершенствовать

---

*Эта прибавляемая теперь глава является перепечаткой главы V части IV книги *Максвелла* «Treatise on Electricity and Magnetism» (1873).

[1]См. *Cayley*, «Report on Theoretical Dynamics», British Association, 1857; и *Thomson* and *Tait*, Natural Philosophy [1867].

наши динамические идеи. Мы поэтому воспользуемся трудами математиков и переведем их результаты с языка анализа на язык динамики с тем, чтобы наши термины вызывали представление не некоторого алгебраического процесса, но некоторого свойства движущихся тел. Язык динамики получил значительное распространение благодаря тем ученым, которые изложили в доступной форме учение о сохранении энергии, и читатель увидит, что многое в последующем изложении навеяно исследованием в *Natural Philosophy Томсона* и *Тэта*, особенно прием начинать с теории импульсивных сил.

Я применил этот прием для того, чтобы избежать явного рассмотрения движения каждой части системы, кроме координат или переменных, от которых зависит движение целого. Без сомнения, очень важно, чтобы изучающий предмет был в состоянии проследить связь между движением каждой части системы и изменением переменных, но совершенно нет необходимости делать это в процессе получения окончательных уравнений, которые не зависят от частной формы этих связей.

3. Переменные. Число степеней свободы системы есть число данных, которые необходимы для определения ее положения. Этим данным можно дать различные формы, но число их зависит от природы самой системы и не может быть изменено. Для большей ясности мы можем представлять себе систему связанной посредством надлежащего механизма с известным числом подвижных частей, каждая из которых способна двигаться только по прямой линии, а не как-нибудь иначе. Воображаемый механизм, который связывает каждую из этих частей с системой, следует представлять себе свободным от трения, лишенным инерции и неспособным деформироваться под действием приложенных сил. Польза этого механизма состоит просто в том, что он поможет воображению приписать телу положение, скорость и количество движения, которые в исследовании *Лагранжа* являются чисто алгебраическими величинами.

Пусть q обозначает положение одной из подвижных частей, определяемое ее расстоянием от неподвижной точки по линии ее движения. Мы будем отличать значения q, соответствующие различным частям, посредством индексов $_{1,2}$ и т. д. Только в том случае, если мы имеем дело с совокупностью величин, относящихся к одной части системы, мы будем опускать индекс.

Если даны значения всех переменных (q), то известно положение каждой из подвижных частей, а в силу воображаемого механизма определена и конфигурация всей системы.

4. Скорости. За время движения системы конфигурация изменяется некоторым определенным образом, а так как конфигурация в каждый момент вполне определяется значениями переменных (q), то скорость каждой части системы, так же как и ее конфигурация, будут вполне определены, если мы знаем значения переменных (q) вместе с их скоростями $\left(\dfrac{dq}{dt}\right.$ или, согласно обозначению Ньютона, $\left.\dot{q}\right)$.

5. Силы. Всякое движение системы, согласное с природой связей, может быть произведено надлежащим выбором хода изменения переменных. Для того чтобы произвести это движение, двигая подвижные части механизма, к этим частям надо приложить силы.

Обозначим силу, которая должна быть приложена к переменной q_r через F_r. Система сил (F) механически эквивалентна (в силу связей системы) той системе сил, какова бы она ни была, которая в действительности производит это движение.

6. Количества движения. Если тело движется по такому пути, что его конфигурация относительно силы, действующей на него, остается одинаковой (как, например, в случае силы, действующей на частицу по направлению ее движения), то движущая сила измеряется скоростью возрастания количества движения. Если F есть движущая сила, а p — количество движения, то

$$F = \frac{dp}{dt},$$

откуда

$$p = \int F\,dt.$$

Интеграл силы по времени называется *импульсом* этой силы, так что мы можем сказать, что количество движения есть импульс силы, который привел бы тело из состояния покоя в данное состояние движения.

В случае движения сложной системы, конфигурация ее непрерывно изменяется в зависимости от скоростей $(\dot{q})$, так что нельзя уже более полагать, что количество движения есть интеграл по времени от силы, действующей на систему.

Но приращение δq любой переменной не может быть больше, чем $\dot{q}'\delta t$, где δt есть время, в течение которого происходит приращение, а $\dot{q}'$ есть наибольшее значение скорости в течение этого времени. В случае системы, движущейся из состояния покоя под действием сил в неизменном направлении, это, очевидно, конечная скорость.

Если даны конечная скорость и конфигурация системы, то мы можем себе представить, что скорость сообщена системе в очень малое время δt, причем начальная конфигурация отличается от конечной конфигурации на величины δq_1, δq_2 и т. д., которые соответственно меньше, чем $\dot{q}_1\delta t$, $\dot{q}_2\delta t$ и т. д.

Чем меньше мы предположим приращение времени δt, тем больше должны быть приложенные силы, но интеграл по времени, или импульс, каждой силы будет оставаться конечным. Предельное значение импульса, когда время убывает и в пределе становится равным нулю, определяется как *мгновенный* импульс; а количество движения p, соответствующее любой переменной q, равно в этом случае, по определению, импульсу, соответствующему этой переменной, когда система мгновенно приводится из состояния покоя в данное состояние движения.

Это представление, что количества движения могут быть произведены посредством мгновенных импульсов на систему, находящуюся в покое, введено только как метод для определения величины количеств движения, ибо они зависят только от мгновенного состояния ее движения, но не от процесса, посредством которого это состояние получено.

В связанной системе количество движения, соответствующее любой переменной, является, вообще, линейной функцией скоростей всех переменных, вместо того, чтобы быть просто пропорциональным скорости, как в динамике частицы.

Импульсы, требующиеся для того, чтобы внезапно изменить скорости системы от значений $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. до значений $\dot{q}_1'$, $\dot{q}_2'$ и т. д., очевидно равны $p_1' - p_1$, $p_2' - p_2$ и т. д., то есть изменениям количеств движения соответствующих переменных.

7. Работа малого импульса. Работа, произведенная силой F_1 в продолжение импульса, есть интеграл силы по перемещению, или

$$W = \int F_1\, dq_1 = \int F_1 \dot{q}_1\, dt.$$

Если $\dot{q}_1'$ есть наибольшее, а $\dot{q}_1''$ — наименьшее значение скорости $\dot{q}_1$ в течение действия силы, то W должно быть меньше, чем

$$\dot{q}_1' \int F_1\,dt \quad \text{или} \quad \dot{q}_1'(p_1' - p_1),$$

и больше, чем

$$\dot{q}_1'' \int F_1\,dt \quad \text{или} \quad \dot{q}_1''(p_1' - p_1).$$

Предположим теперь, что импульс $\int F_1\,dt$ беспредельно убывает; тогда значения $\dot{q}_1'$ и $\dot{q}_1''$ будут приближаться одно к другому и наконец совпадут со значением $\dot{q}_1$; мы можем теперь написать $p_1' - p_1 = \delta p_1$, так что произведенная работа оказывается

$$\delta W_1 = \dot{q}_1 \delta p_1,$$

то есть *работа, произведенная очень малым импульсом, есть произведение импульса на скорость.*

8. Приращение кинетической энергии. Если работа затрачивается на приведение в движение консервативной системы, то ей сообщается энергия, и система приобретает способность совершить равное количество работы, преодолевая сопротивления, пока она не придет в состояние покоя.

Энергия, которой система обладает в силу своего движения, называется ее *кинетической энергией* и сообщается ей в виде работы, затраченной силами, приводящими ее в движение.

Если T есть кинетическая энергия системы и если она принимает значение $T + \delta T$ вследствие действия бесконечно малого импульса, составляющие которого суть δp_1, δp_2 и т. д., то приращение δT должно быть суммой количеств работы, произведенных составляющими импульса или, символически,

$$\delta T = \dot{q}_1 \delta p_1 + \dot{q}_2 \delta p_2 + \cdots = \sum (\dot{q} \delta p). \tag{1}$$

Мгновенное состояние системы вполне определяется, если даны переменные и количества движения. Следовательно, кинетическая энергия, зависящая от мгновенного состояния системы, может быть выражена через переменные (q) и количества движения (p). Этот способ

выражения величины T ввел *Гамильтон*. Если T выражено таким образом, мы будем его отмечать индексом $_p$ так: T_p.

Полное изменение величины T_p

$$\delta T_p = \sum\Big(\frac{\partial T_p}{\partial p}\,\delta p\Big) + \sum\Big(\frac{\partial T}{\partial q}\,\delta q\Big). \tag{2}$$

Последний член можно написать в виде

$$\sum\Big(\frac{\partial T_p}{\partial q}\,\dot{q}\delta t\Big);$$

этот член убывает вместе с δt и окончательно исчезает [по сравнению с первым членом], когда импульс делается мгновенным.

Отсюда, сравнивая коэффициенты при δt в уравнениях (1) и (2), получаем

$$\dot{q} = \frac{\partial T_p}{\partial p}, \tag{3}$$

то есть *скорость, соответствующая переменной q, есть частная производная* от T_p по *соответствующему количеству движения p*.

Мы пришли к этому результату из рассмотрения импульсивных сил. Благодаря этому методу мы избежали рассмотрения изменения конфигурации за время действия сил. Но мгновенное состояние системы во всех отношениях одинаково, приведена ли система из состояния покоя в данное состояние движения кратковременным действием импульсивных сил или она пришла в такое состояние любым другим образом, в какой бы то ни было постепенности.

Другими словами, переменные и соответствующие им скорости и количества движения зависят только от действительного состояния движения системы в данный момент, а не от ее предшествующей истории.

Следовательно, равенство (3) одинаково справедливо, предполагаем ли мы, что состояние движения системы вызвано импульсивными силами, или силами, действующими каким бы то ни было другим образом.

Поэтому мы можем теперь оставить рассмотрение импульсивных сил и освободиться от ограничений, наложенных нами на вызываемые этими силами изменения конфигурации.

9. Уравнения движения Гамильтона. Мы уже показали, что

$$\frac{\partial T_p}{\partial p} = \dot{q}. \tag{4}$$

Пусть система движется по произвольному пути, подчиненному условиям, наложенным ее связями; тогда изменения величин p и q будут

$$\delta p = \frac{dp}{dt}\,\delta t, \quad \delta q = \dot{q}\delta t. \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{\partial T_p}{\partial p}\,\delta p = \frac{dp}{dt}\dot{q}\delta t = \frac{dp}{dt}\delta q, \tag{6}$$

а полное изменение кинетической энергии T_p

$$\delta T_p = \sum\Big(\frac{\partial T_p}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T_p}{\partial q}\delta q\Big) = \sum\Big\{\Big(\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q}\Big)\delta q\Big\}. \tag{7}$$

Но приращение кинетической энергии вызвано работой, произведенной приложенными силами, или

$$\delta T_p = \sum(F\delta q). \tag{8}$$

В последних двух выражениях все изменения δq независимы одно от другого, так что мы вправе приравнять коэффициенты при каждом из них в обоих выражениях (7) и (8). Таким образом, получаем

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q_r}, \tag{9}$$

где количество движения p_r и сила F_r относятся к переменной q_r.*

Уравнений этого вида столько же, сколько переменных. Эти уравнения были даны *Гамильтоном.* Они показывают, что сила, соответствующая любой переменной, есть сумма двух частей. Первая часть есть скорость возрастания количества движения этой переменной относительно времени. Вторая часть есть скорость возрастания кинетической энергии относительно приращения переменной, при условии, что остальные переменные и все количества движения остаются постоянными.

*Однако, см. *ниже*, в конце приложения II, примеч. к настоящему параграфу.

10. Выражение кинетической энергии через количества движения и скорости. Пусть p_1, p_2 и т. д. будут количества движения, а $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. — скорости в данный момент, и пусть p_1, p_2 и т. д., $\dot{\mathrm{q}}_1$, $\dot{\mathrm{q}}_2$ и т. д. будет другая система количеств движения и скоростей, такого рода, что

$$\mathrm{p}_1 = np_1, \quad \dot{\mathrm{q}}_1 = n\dot{q}_1 \quad \text{и т. д.} \tag{10}$$

Очевидно, что системы p и q будут согласны со связями системы, если системы p и q удовлетворяют этому.

Пусть теперь n изменяется на δn. Работа, произведенная силой F_1, [по § 7] есть

$$F_1\delta\mathrm{q}_1 = \dot{\mathrm{q}}_1\delta\mathrm{p}_1 = \dot{q}_1 p_1 n\delta n. \tag{11}$$

Пусть n возрастает от 0 до 1; в таком случае система приводится из состояния покоя в состояние движения (p, $\dot{q}$), и полная работа, затраченная на то, чтобы произвести это движение, есть

$$(\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \cdots) \int\limits_0^1 n\,dn. \tag{12}$$

Но

$$\int\limits_0^1 n\,dn = \frac{1}{2},$$

а работа, затраченная на то, чтобы произвести движение, эквивалентна кинетической энергии. Отсюда

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \cdots), \tag{13}$$

где $T_{p\dot{q}}$ обозначает кинетическую энергию, выраженную через количества движения и скорости. Переменные q_1, q_2 и т. д. не входят в это выражение.

Итак, кинетическая энергия равна полусумме произведений количеств движения на соответствующие им скорости.

Если кинетическая энергия выражена таким образом, мы будем ее обозначать символом $T_{p\dot{q}}$. Это функция только количеств движения и скоростей, не содержащая самих переменных.

11. Существует третий метод для выражения кинетической энергии, который, вообще, и считается основным. Разрешая уравнения (3), мы можем выразить количества движения через скорости, а затем, подставляя эти значения в уравнение (13), получим для T выражение, содержащее только скорости и переменные. Если T выражено в этой форме, мы будем его обозначать символом $T_{\dot q}$. Именно в такой форме выражена кинетическая энергия в уравнениях *Лагранжа.*

12. Так как T_p, $T_{\dot q}$, $T_{p\dot q}$ суть различные выражения для одной и той же величины, то очевидно, что

$$T_p + T_{\dot q} - 2T_{p\dot q} = 0,$$

или

$$T_p + T_q - p_1\dot q_1 - p_2\dot q_2 - \ldots = 0. \tag{14}$$

Отсюда, если изменяются все величины p, q и $\dot q$,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial T_p}{\partial p_1} - \dot q_1\Big)\delta p_1 + \Big(\frac{\partial T_p}{\partial p_2} - \dot q_2\Big)\delta p_2 + \ldots + \Big(\frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_1} - p_1\Big)\delta \dot q_1 + \\ + \Big(\frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_2} - p_2\Big)\delta \dot q_2 + \ldots + \Big(\frac{\partial T_p}{\partial q_1} + \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial q_1}\Big)\delta q_1 + \\ + \Big(\frac{\partial T_p}{\partial q_2} + \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial q_2}\Big)\delta q_2 + \ldots = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Изменения δp не независимы от изменений δq и $\delta \dot q$, так что нельзя сразу утверждать, что коэффициент при каждом изменении (вариации) в этом уравнении равен нулю. Но из уравнений (3) мы знаем, что

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_1} - \dot q_1 = 0 \text{ и т. д.}, \tag{16}$$

так что члены, содержащие изменения δp, исчезают сами по себе.

Остающиеся теперь изменения δq и $\delta \dot q$ все независимы между собой*, так что, приравнивая нулю коэффициенты при изменениях $\delta \dot q_1$, …, получаем:

$$p_1 = \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_2} \quad \text{и т. д.}; \tag{17}$$

*См. *ниже*, конец приложения II.

то есть, *составляющие равны частным производным от $T_{\dot q}$ по соответствующим скоростям.*

Далее, приравнивая нулю коэффициенты при изменениях $\delta q_1, \ldots,$ получим:

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_1} + \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial q_1} = 0; \tag{18}$$

то есть *частная производная от кинетической энергии по любой переменной q_1, если T выражено в функции скоростей, равна по величине и противоположна по знаку такой же производной, но для того случая, когда T выражено в функции количеств движения.*

В силу уравнения (18), уравнение движения (9) можно написать так:

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial p_1}, \tag{19}$$

или

$$F_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_1} - \frac{\partial T_q}{\partial q_1}; \tag{20}$$

в этой именно форме были даны уравнения движения Лагранжем.

13. В предыдущем исследовании мы избежали рассмотрения вида функции, выражающей кинетическую энергию через скорости или через количества движения. Единственная явная форма, которую мы вывели для нее, это

$$T_{p\dot q} = \frac{1}{2}(p_1\dot q_1 + p_2\dot q_2 + \ldots), \tag{21}$$

в которой кинетическая энергия выражается как полусумма произведений количеств движения на соответствующие скорости.

Но скорости мы можем выразить через частные производные от T_p по количествам движения, как в уравнении (3); таким образом, получаем

$$T_p = \frac{1}{2}\Big(p_1\frac{\partial T_p}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial T_p}{\partial p_2} + \ldots\Big). \tag{22}$$

Это значит, что T_p есть однородная функция второй степени от количеств движения p_1, p_2 и т. д.

Можно также выразить количества движения через $T_{\dot q}$, откуда

$$T_{\dot q} = \frac{1}{2}\Big(\dot q_1\frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_1} + \dot q_2\frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_2} + \ldots\Big), \tag{23}$$

т. е. $T_{\dot q}$ есть однородная функция второй степени относительно скоростей $\dot q_1$, $\dot q_2$ и т. д.

Напишем

$$P_{11} \text{ вместо } \frac{\partial^2 T_{\dot q}}{\partial \dot q_1^2}, \quad Q_{12} \text{ вместо } \frac{\partial^2 T_{\dot q}}{\partial \dot q_1 \partial \dot q_2} \quad \text{и т. д.}$$

и

$$Q_{11} \text{ вместо } \frac{\partial^2 T_q}{\partial p_1^2}, \quad Q_{12} \text{ вместо } \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_1\, \partial p_2} \quad \text{и т. д.;}$$

в таком случае, так как $T_{\dot q}$ и T_p функции второй степени,— первая — от $\dot q$, вторая — от p, — то все величины P и Q будут функциями одних только переменных q, независящими от скоростей и количеств движения. Таким образом, получим следующие выражения для T:

$$2T_{\dot q} = P_{11}\dot q_1^2 + 2P_{12}\dot q_1 \dot q_2 + \ldots, \tag{24}$$

$$2T_p = Q_{11}p_1^2 + 2Q_{12}p_1 p_2 + \ldots \tag{25}$$

Количества движения выражаются через скорости линейными уравнениями вида

$$p_1 = P_{11}\dot q_1 + P_{12}\dot q_2 + \ldots, \tag{26}$$

а скорости выражаются через количества движения линейными уравнениями вида

$$\dot q_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \ldots \tag{27}$$

В трактатах по динамике твердого тела коэффициенты, соответствующие P_{11}, в которых оба индекса одинаковы, называются *моментами инерции*, а коэффициенты, соответствующие P_{12}, в которых индексы различны, называются *произведениями инерции*. Мы можем распространить эти названия на стоящую перед нами более общую задачу, в которой эти величины не постоянны, как в случае твердого тела, но являются функциями переменных q_1, q_2 и т. д.

Подобным же образом можно называть коэффициенты вида Q_{11} *моментами подвижности*, а коэффициенты вида Q_{12} — *произведениями подвижности*. Однако мы довольно редко будем иметь случай касаться коэффициентов подвижности.

14. Кинетическая энергия системы есть величина существенно положительная или нуль. Поэтому, будет ли она выражена через скорости или через количества движения, коэффициенты должны быть

таковы, чтобы ни при каких действительных значениях переменных T не могло получиться отрицательным.

Таким образом, существует ряд необходимых условий, которым должны удовлетворять значения коэффициентов P. Эти условия таковы.

Величины P_{11}, P_{12} и т. д. должны быть все положительны; все $n-1$ детерминантов, составленных последовательно из детерминанта

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & \dots & P_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n} & P_{2n} & P_{3n} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

опусканием членов с индексом 1, затем членов, имеющих в своем индексе цифры 1 или 2 и т. д., должны также быть положительны.

Итак, при n переменных число условий есть $2n-1$.

Коэффициенты Q подчинены аналогичным условиям.

15. В этом очерке основных принципов динамики сложной системы мы оставляли без внимания механизм, посредством которого связаны части системы. Мы не написали даже ряда уравнений для того, чтобы указать характер зависимости движения любой части системы от изменения переменных. Мы сосредоточили наше внимание на переменных, их скоростях и количествах движения и на силах, которые действуют на части механизма, соответствующие переменным. Наши единственные допущения состоят в том, что связи системы таковы, что время не содержится явно в уравнениях связей, и что закон сохранения энергии приложим к системе.

Такое изложение методов чистой динамики небесполезно потому, что *Лагранж* и большинство его последователей, которым мы обязаны этими методами, ограничились, вообще говоря, их доказательством и для того, чтобы сосредоточить свое внимание на символах, они старались изгнать все понятия, кроме чистого понятия о величине, не только обходясь без диаграмм, но избавившись даже от понятий о скорости, количестве движения и энергии, после того, как они были представлены символами в начальных уравнениях. Для того чтобы быть в состоянии обращаться с результатами этого анализа на обыкновенном динамическом языке, мы старались перевести основные уравнения этого метода на язык, который может быть понятен без употребления символов.

Подобно тому, как развитие идей и методов чистой математики дало возможность, благодаря созданию теоретической динамики, пролить свет на многие истины, которые не были бы открыты без математического изучения*, так и в том случае, если мы собираемся построить динамические теории других наук, мы должны проникнуться как этими динамическими истинами, так и математическими методами.

При образовании понятий и терминов, относящихся ко всякой науке, которая, подобно науке об электричестве имеет дело с силами и их действиями, мы должны постоянно держать в уме идеи, принадлежащие основной динамической науке, так чтобы можно было, в дальнейшем развитии науки, избежать несогласия с тем, что уже установлено, а также чтобы, когда выяснятся наши точки зрения, — принятая нами терминология служила нам помощью, а не помехой.

*Оно обобщило также наши динамические представления настолько, что можно утверждать, что физическая система имеет динамический характер, хотя мы можем оказаться не в состоянии составить себе понятие о конфигурациях и движениях, которые представлены переменными. См. приложение II.

Приложение I (1920 г.)
Относительность сил природы

Понятие сил природы было введено в науку в определенной форме *Исааком Ньютоном* при изложении его законов движения во введении к *Началам*. Он определил физическую силу как величину, которая распознается и измеряется по ускорению тела, на которое она действует. Это была самая простая мыслимая мера; молчаливо допускалось, что силы, определенные таким образом, соответствуют действительным неизменным причинам движения, которые всегда, в согласии с единством природы, имеются налицо, всякий раз, как повторяются те же самые условия в окружающей системе тел. И сам собой напрашивается вопрос относительно того, почему объективной природе соответствует эта особенная мера, а не какая-нибудь более сложная, содержащая, например, наряду с ускорением, также скорость, либо ускорение ускорения [т. е. ускорение второго порядка].

Но это введение понятия сил природы вызвало также практическую потребность указания какого-нибудь точно установленного способа для определения скорости и ускорения. Положение и скорость принадлежат одной системе тел в пространстве и времени, но всегда бывают *отнесены* к какой-нибудь другой системе. Простейший план состоит в том, чтобы принять некоторую основную всеобщую «систему референции», т. е. систему, к которой мы относим все наблюдаемые величины. Соответственно этому, *Ньютон* построил систему абсолютного пространства и абсолютного времени, относительно которой должны определяться движения и силы в природе. И вот, для динамической науки необходимо дать хотя бы временное определение этой системы референции, пригодное для непосредственно изучаемого ряда вопросов, и затем постоянно исправлять это определение по мере того, как того требует прогресс знания. Так, для обыкновенных целей удовлетворительной системой референции является пространство, отнесенное к окружающей местности, и время, показываемое обыкновенным вибратором[1]; но для более обширных задач, когда должно быть принято

[1] Т. е. каким-нибудь изохронно колеблющимся телом, например, маятником. — *Н. А.*

во внимание вращение земли, эта система уже недостаточна и должна быть заменена такой системой пространства и времени, которая не вращается вместе с землей, и т. д. Совершенная *Коперником* революция, состоявшая в перенесении центра референции от земли к солнцу, была, таким образом, прелюдией к этому динамическому порядку идей. Мы можем представлять себе окончательную систему пространства и времени, как такую систему, к которой могут быть отнесены звезды и звездные миры и которая обеспечивает наибольшую простоту для способа описания их движений. Всякая система пространства и времени, к которой, согласно этому, с достаточной точностью для рассматриваемых целей могут быть отнесены силы природы, получила название инерциальной системы, потому что относительно нее эти силы определяются ньютоновым произведением инертной массы на ускорение. Для обыкновенных целей существует много одинаково точных систем инерции; равномерное поступательное движение такой системы не меняет ее практической пригодности.

Это допущение абсолютного пространства и абсолютного времени в *Началах* в 1687 году было сделано с целью упростить изучение движений планет; но оно немедленно вызвало критику со стороны философов у нас и заграницей, хотя они, по-видимому, не могли практически предложить ничего взамен. Знаменитый *Лейбниц* не переставал оспаривать его законность; его полемика в письмах с доктором *Кларком* (Samuel Clarke), взявшим на себя защиту основных принципов ньютоновой практической формулировки, является одним из классических произведений метафизической философии. Наш собственный философ *Беркли* еще студентом Колледжа св. Троицы в Дублине, где он уже размышлял над своей критически-идеалистической системой философии, встретился с затруднениями того же рода при своем изучении основ ньютоновой системы мира. Имеем ли мы какое-либо право допустить для формулировки законов природы существование абсолютной системы пространства и времени, особенно по отношению к обширным пустым пространствам астрономии? И имеем ли мы действительные средства распознать такую систему? Может быть это, в большой мере, вопрос выражения; если бы философы могли условиться подразумевать одну и ту же вещь под терминами, которыми они пользуются, то все было бы благополучно; иначе были бы нарушены законы мышления.

Вопрос о законности такого практического определения основного, стандартного пространства и времени оставался, с точки зрения фило-

софской, открытым; в последние годы этот вопрос был снова подвергнут оживленному обсуждению. Явления электричества были вполне объяснены, по *Фарадею* и *Клерку Максвеллу*, существованием напряжений, распространяющихся в эфире, который находится в покое в невозмущенных областях, так что естественно связать с ним ньютонову систему пространства и времени. Таким образом, эфир являлся бы ничем иным как пространством и временем, наделенными как физическими свойствами, инерцией и упругостью, — так и свойствами протяженности. Но впоследствии было найдено, что весьма тонкие и точные опыты, которые, казалось, способны определить движение земли относительно эфира, — а оно должно было быть, по меньшей мере, того же порядка, что ее скорость по орбите вокруг солнца, — не привели ни к какому результату. Это не было неожиданно и было в действительности вполне объяснимо в порядке идей теории *Максвелла.* Но это обстоятельство вызвало независимые течения мысли, стремившиеся выбором более сложной системы референции совершенно избавиться от таких универсальных сил природы, как, например, тяготение, коих единственным проявлением является ускорение движений, для объяснения которого они и были введены. Так, если установить шкалу времени таким образом, чтобы она менялась от одного места к другому, так что длительность будет функцией положения, то кажущиеся величины ускорений тяготения будут, конечно, соответственно изменяться. Это вытекает из того (сравн. § 103), что все тела в одном и том же месте обладают совершенно одинаковым ускорением вследствие тяготения, и если это всеобщее характерное свойство можно свести к сложному исчислению пространства и времени и таким образом освободиться от него, то и другие отношения физической природы должны стать в зависимость от несколько измененного исчисления, введенного для этой цели. Но наше знание физической протяженности и длительности происходит, главным образом, от нашего чувства зрения: только небольшая его часть была бы приобретена расой, лишенной зрения. Нельзя не признать лучи света вестниками направления и длительности из всех частей видимой вселенной. Эти весьма важные и основные явления излучения должны также стать простыми местными свойствами времени и пространства, иначе они бы поставили нас в связь со всемирной системой, относительно которой они распространяются. *Эйнштейном* и многочисленной и имеющей большое значение школой его последователей была недавно развита теория, претендующая быть основанной

на метафизических принципах и утверждающая, что силы тяготения, и только эти силы, могут быть в точности представлены как присущие более сложной системе пространства и времени вместо физической природы, описанию которой эта система помогает; в то же время эта теория тем самым близко подходит к вышеупомянутому электродинамическому учению об относительности.

Но с другой стороны, было обнаружено, что те же результаты можно получить естественным образом и без вмешательства революционных идей о пространстве и времени, как незначительное (хотя и сложное аналитически) распространение основного физического *принципа наименьшего действия* (см. *ниже*), так как специальные отношения напряжения, энергии и количества движения, на которых, как критериях, должна была развернуться теория, фактически уже содержатся в неявном виде в этом всеобщем принципе.

Это изменение в способе выражения ньютонианского тяготения на практике приводит, конечно, к весьма малой разнице; но оно привлекло к себе особое внимание тем, что устраняет одно не поддающееся объяснению легкое несогласие с наблюдением в движении внутренней планеты Меркурия, которое раньше пытались приписать предполагаемому наличию мелких масс между планетой и солнцем. Такое эквивалентное изменение системы пространства и времени должно также оказать влияние, реальным или кажущимся образом, на распространение излучения в сильном гравитационном поле. Одно из следствий этого состоит в том, что лучи света должны слегка отклоняться при своем прохождении вблизи солнца, и результаты, полученные гринвичскими и кембриджскими астрономами при наблюдений солнечного затмения 1919 года, действительно довольно точно подтвердили требуемую величину отклонения. Но другой результат такого же порядка идей спектроскопического характера еще нуждается в определенном подтверждении.

Основной пробел в теории тяготения, который желательно было пополнить, это найти такой математический способ выражения, который привел бы ее в связь с теорией электрических взаимодействий и излучения, с которыми она была разобщена и даже, в вопросе об отношении инертности к весу, находилась в очень незначительном разногласии. Этого достигли тем, что общее всем телам ускорение просто приписали особенности системы референции, вместо введения в обыкновенное пространство внутренней гравитационной потенциаль-

ной функции, указывающей местное напряжение. Для весьма больших скоростей, в тысячи раз превышающих действительные скорости небесных тел, выводы из этой точки зрения были бы совершенно отличны от простого ньютонианского тяготения, и при наших средствах выражения они были бы чрезвычайно сложны; но в действительном звездном мире это различие крайне незначительно. Далекая от того, чтобы заменить ньютонову астрономию, эта теория может установить связь с действительностью, лишь пользуясь ее представлениями и методами. Мы можем, пожалуй, заключить, что связь тяготения, прежде изолированного, с другими физическими агентами была установлена; но не следует отказываться от надежды, что способ выражения этой связи может со временем подвергнуться большому упрощению, особенно при большем внимании к принципу наименьшего действия, так как необходимые для этого изменения весьма малы. Между тем экстраполирование, опирающееся на современную общую формулировку теории, к исследованию миров, содержащих гораздо большие скорости, чем скорости звезд в нашем собственном мире, представляет прекрасный предмет для туманных математических умозрений.

Общее учение об относительности, по крайней мере, в его крайней формулировке, оспаривает законность соображений, подобных изложенным в §§ 105–6. Этот вопрос есть пока предмет спора различных партий. Если бы мы были лишены возможности видеть звезды, то было бы больше оснований заявлять, что не философично даже упоминать о такой вещи, как абсолютное вращение земли, или о всяком движении, которого нельзя выразить по отношению к соседним телам. Эта теория требует, чтобы все предметы были отнесены к местному масштабу и местному времени; однако и эта теория также нуждается на практике в пользовании направлениями и периодами колебания лучей света, как законным средством распознавания. Если не подчинить лучей света контролю масштаба и часов, то эти меры не будут согласованы между собой; если же это сделано, то этой связью можно воспользоваться для установления системы, относительно которой распространяются лучи с приписываемой им всемирной скоростью, и таким образом отчасти определить то, что рассматривалось, как пространственный эфир. Можно воспроизвести искусственное гравитационное поле, сообщая ускорение системе референции, при условии, что это выполнено не простым алгебраическим преобразованием координат; но лучи света должны были бы иметь различные скорости по направлениям вперед

и назад, что, как будто, заключает в себе критерий различения для такого неограниченного «принципа эквивалентности» гравитационного поля в переменной системе референции. Чисто алгебраическая теория есть абстракция от обширного поля явлений, и существенным для нее вопросом является степень ее собственной законности.

Примечание к § 145

Найденное, как средний результат многочисленных современных определений, кэвендишево значение 5,45 для средней плотности земли должно быть увеличено меньше, чем на два процента. Крутильные весы были значительно уменьшены в размере и улучшены *Бойсом* (1894 г.) употреблением крайне тонких и чрезвычайно упругих кварцевых нитей для крутильного подвеса.

Крутильные весы *Мичелл–Кэвендиш–Кулона* были применены *Этвёсом* к исследованию пропорциональности между притяжением и массой, причем получены результаты чрезвычайной точности. Кажущийся вес тела есть его притяжение к земле, измененное центробежной силой, направленной под острым углом к вертикали прочь от оси суточного вращения. Эта последняя часть, конечно, значительна, составляя долю одного процента равнодействующей, и имеет горизонтальную составляющую, направленную по меридиану. Если бы массы, входящие как множители в обе части равнодействующей силы, не были в точности равны, то крутильные весы, в которых концы горизонтального стержня нагружены массами из различных веществ, показывали бы отклонение стержня относительно штатива, если его повернуть около вертикали от положения восток-запад до положения запад-восток. *Этвёс* (1891, 1897) нашел таким образом, что отклонение от пропорциональности веса массе должно быть, действительно, меньше, чем одна двадцатимиллионная, а *Зееманн* (Zeeman) недавно (1917 г.), при помощи усовершенствованного прибора с кварцевым подвесом, еще понизил этот предел и распространил его на кристаллы и на вещества радиоактивного происхождения. Случилось так, что этот предел приблизительно того же порядка, что результат оптической и электрической проверки отсутствия увлечения эфира движением земли.

Если m есть инертная масса, определяющая центробежную силу, а m' — весомая масса, то, если m равно m', кажущийся вес будет иметь одинаковое направление для всех веществ, и опыт не даст никакого ре-

зультата. Возможный результат легко было бы приписать центробежной силе избытка $m - m'$, так как момент ее горизонтальной составляющей около оси кручения действует в противоположных направлениях в обоих положениях стержня и штатива.

Из электродинамики *Максвелла* можно вывести, что если тело теряет лучеиспусканием энергию ε, оно теряет количество $\frac{\varepsilon}{c^2}$ инертной массы, где c — скорость света. По современным обобщениям этой теории, всякая энергия обладает инертностью. Инерцию электрона представляют себе обусловленной его кинетической энергией движения. Точность полученного *Этвёсом* результата приводит таким образом к заключению, что вся инерция электрона должна быть весома и что, действительно, вся энергия обладает инертностью, а потому тоже весома. Итак, ни инертность, ни весомость не являются более специфическими постоянными материи: они должны быть связаны либо с эфиром, в котором существует материя, либо с абстрактной системой референции пространства–времени, которая представляет собой все, что может остаться, если существование среды, подобной эфиру, отрицается.

Приложение II (1920 г.)
Принцип наименьшего действия

Основным стремлением для всякой науки является сведение ее к наименьшему числу управляющих ею принципов. Для динамической науки это выполнил *Гамильтон* (Sir William Rowan Hamilton) из Дублина (1834–5), опираясь на аналитические основы, установленные *Лагранжем* в виде принципа наименьшего действия при помощи методов его вариационного исчисления (в 1758 г.) и позднее (в 1788 г.), но с меньшим значением для физических наук, в виде принципа возможных работ в *Аналитической механике*.

Закон сохранения энергии может доставить только одно уравнение, а потому он не может сам по себе определить траекторию одного тела, и тем менее траекторию более сложной системы (так что §§ 107–112 нуждаются в некотором ограничении). Но если тело с данной скоростью и из данного положения движется по своей траектории в поле силы, то закон сохранения энергии определит скорость, которую должно иметь это тело, когда оно придет в любое другое положение, как в случае свободного движения, так и под действием связей без трения, не потребляющих энергии. Если W, функция положения, представляет потенциальную энергию тела в поле, рассчитанную на единицу массы, то скорость v тела, действительно, определится из уравнения

$$\frac{1}{2}mv^2 + mW = \frac{1}{2}mv_0^2 + mW_0 = mE,$$

где индексы при v_0 и W_0 относятся к начальному положению, а mE есть полная энергия тела относительно поля силы, сохраняющаяся в продолжение всего пути.

Отсюда,

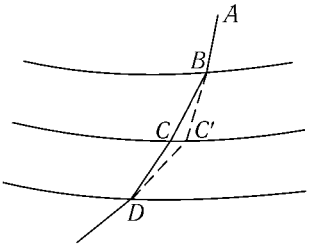
$$v = (2E - 2W)^{1/2},$$

так что скорость зависит, через посредство W, только от положения.

Теперь мы можем задаться следующим вопросом. По какой траектории должно тело массы m, подчиненное связям без трения, двигаться

от начального положения A к конечному положению B в пространстве, с данной полной энергией mE, которая сохраняется постоянной, так чтобы *действие* вдоль этой траектории, определяемое как предел суммы $\sum mv\delta s$, т. е. как $\int mv\,ds$, где δs есть элемент длины этой траектории, имело для всякого перемещения наименьшее возможное значение. Известно, что метод решения более простых вопросов этого рода был знаком *Ньютону*, решение же изложенного здесь вопроса, впервые предложенное в неясной форме *Мопертюи*, в бытность его президентом Берлинской Академии при Фридрихе Великом, было постепенно развито и дополнено знаменитой швейцарской математической семьей *Бернулли* и их соотечественником *Эйлером*; наконец, распространенное на более сложные случаи, оно положило начало после трактата *Эйлера*, вышедшего в 1744 году, в руках молодого *Лагранжа* (Мемуары Туринской Академии Наук, 1758) вариационному исчислению, этому плодотворнейшему со времени *Ньютона* и *Лейбница* обобщению исчисления бесконечно малых, особенно полезному в физических науках.

Проведем в заданном поле силы ряд последовательных близких между собой поверхностей постоянных скоростей, а потому и постоянной потенциальной энергии mW и рассмотрим траекторию $ABCD\ldots$, пересекающую эти поверхности в точках B, C, D, ... Следуя способу *Ньютона**, мы будем считать скорость сохраняющей постоянное значение, скажем v_1, на бесконечно малом пути от B до C, и постоянное значение, скажем v_2, на пути от C до D; эти элементы траектории нужно, таким образом, рассматривать как прямые, причем предполагается, что поле силы действует посредством последовательного ряда весьма малых импульсов в точках B, C, D, ..., которые в пределе, когда элементы траектории бесконечно уменьшаются, будут обращаться в непрерывное действие конечной силы.



Если $\sum v\delta s$ должна иметь минимум на протяжении части пути $ABCD$, то согласно обычному критерию незначительное изменение, под влиянием связей без трения, которое заставило бы тело пройти часть пути по близкой линии $BC'D$,

*Ср. Начала, кн. I, отд. II, предл. I, о равномерном описывании площадей при центральной траектории.

не должно изменять величины действия, если ограничиваться рассмотрением малых величин первого порядка. Теперь, при нашем представлении силы как быстрой последовательности малых импульсов, изменение, произведенное таким образом в этой функции действия, равно

$$v_1(BC' - BC) + v_2(C'D - CD),$$

и эта величина должна исчезнуть, если ограничиться малыми первого порядка. Но $BC' - BC = -CC' \cos BCC'$, а $C'D - CD = -CC' \cos DCC'$. Следовательно, условие для экстремального значения таково, чтобы составляющая скорости v_1 по CC' была равна составляющей скорости v_2 по тому же направлению, где CC' — любой элемент длины на поверхности постоянной скорости v, а потому и постоянной кинетической энергии W, проведенной через точку C. Это значит, что импульс, который должен быть сообщен телу в точке C, для того чтобы изменить его скорость от v_1 до v_2, должен быть нормален к этой поверхности, или, переходя к пределу, что сила, действующая на тело, должна повсюду иметь направление падения потенциала W. То есть, каков бы ни был вид потенциальной функции, последовательный ряд импульсов должен иметь направление силы; уже вид выражения для скорости v требует, чтобы эти импульсы имели величину, необходимую для того, чтобы сообщить изменения скорости, согласные с законом сохранения энергии. Таковы именно критерии для свободной траектории.

Итак, для малой дуги свободной траектории действие $m \sum v \delta s$ меньше, чем оно могло бы быть в том случае, если бы траектория подверглась незначительному местному изменению вследствие наличия связей без трения. Свободную траекторию можно, таким образом, определить как такой путь, который сопровождался бы наименьшим расходом действия при всяком перемещении тела, хотя это не значит, что полный расход действия от одного до другого конца длинного пути будет необходимо иметь наименьшее возможное значение. Эта формула *наименьшего действия*, выраженная вариационным уравнением

$$\delta \int mv\, ds = 0, \quad \text{где} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mW = mE,$$

сама по себе достаточна для того, чтобы выделить действительную свободную траекторию из всех несвободных путей.

И вообще, для всякой динамической системы, обладающей кинетической энергией, выраженной функцией T нужного числа геометрических координат, и потенциальной энергией, выраженной функцией W,

можно показать, что траектории движения от одной данной конфигурации к другой вполне определяются одним вариационным уравнением

$$\delta \int T\,dt = 0, \quad \text{причем} \quad T + W = E,$$

где E — полная энергия, которую мы предполагаем подчиняющейся закону сохранения, причем рассматриваемые вариации должны согласоваться со связями без трения.

Другая форма принципа выражается уравнением

$$\delta \int (T - W)\,dt = 0$$

при условии, что полное время движения от данной начальной до данной конечной конфигурации сохраняется постоянным. Эта форма более удобна для аналитических целей, потому что способ вариации не ограничивается связями без трения; так как требование сохранения энергии не налагается, то внешние силы, которые могут содержаться в видоизмененном выражении W, могут действовать, сообщая системе энергию. Требование постоянства времени прохождения, которое занимает здесь место сохранения энергии, есть аналитически, хотя не физически, более простая форма ограничения. Из этой формы, выполняя процесс варьирования, можно непосредственно получить полную систему общих уравнений движения, выведенную *Лагранжем* (см. гл. IX, § 12).

Если T есть однородная функция второй степени от обобщенных составляющих скорости, то $T^{1/2}\,dt$ есть однородная функция первой степени от бесконечно малых элементов координат; поэтому первая форма, выраженная (по *Якоби*) в виде

$$\delta \int (E - W)^{1/2} (T^{1/2}\,dt) = 0,$$

уже не содержит времени. Таким образом, это уравнение определяет геометрические свойства пути системы без отношения ко времени; для простой траектории оно приводится к прежней форме, исследованной выше.

В современном рассмотрении основных принципов динамики, в особенности, когда дело касается попытки их приспособления к новым классам физических явлений, динамические соотношения которых скрыты, этот принцип вариации действия, конденсирующий весь

предмет в одной формуле, не зависящей от частной системы координат, занимает, естественно, самое выдающееся место.

В качестве дополнения к главе IX мы теперь установим эти положения принципа действия для общей динамической системы. Проще и строже всего это сделать посредством введения аналитического метода вариаций, изобретенного, как уже упомянуто выше, *Лагранжем.*

Этот принцип, как уже выведено для простейшего случая, относится к формам путей или траекторий; если желательно также включить в рассмотрение и закон, по которому описывается траектория, то в формулы должно также войти время. Критерий для свободной траектории состоял в том, что $\delta \int v\,ds$, причем энергия E_0 постоянна в продолжение всего движения, или, что то же самое, что $\delta \int v^2\,dt = 0$ при том же условии; если обозначить кинетическую энергию $\frac{1}{2}mv^2$ через T, то этот критерий примет вид $\delta \int 2T\,dt = 0$ при том же ограничении условием постоянства полной энергии.

Выполним варьирование непосредственно в этой последней форме, но оставляя покамест время неизменным,

$$\delta \int T\,dt = \delta \int_{t_1}^{t^2} \frac{1}{2}m\Big\{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dz}{dt}{}^2\Big)\Big\}\,dt =$$

$$= \int m\Big(\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\delta z}{dt}\Big)\,dt,$$

где d есть дифференциал от x, когда тело движется по траектории при изменении времени, а δx есть вариация значения x при переходе от точки траектории к соответствующей точке на близком возможном пути, который с ней сравнивается. Введение разных символов d и δ для различения изменений этих двух типов есть существенная черта вариационного исчисления; мы уже пользовались основным соотношением $\delta dx = d\delta x$. Теперь, интегрируя по частям для того, чтобы избавиться от вариаций скоростей, которые не являются независимыми вариациями, а следовательно, и не произвольными, получаем

$$\delta \int T\,dt = \Big|m\frac{dx}{dt}\delta x + m\frac{dy}{dt}\delta y + m\frac{dz}{dt}\delta z\Big|_1^2 -$$

$$- \int \Big(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y + m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\Big)\,dt;$$

здесь первый член представляет разность значений при верхнем и нижнем пределах интеграла, отмеченных индексами 2 и 1, которые соответствуют конечному и начальному положениям тела. Второй член равен

$$-\int (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dt,$$

где X, Y, Z — составляющие силы, действующей на частицу m, определяемой по приобретаемому частицей ускорению.

Мы можем теперь же распространить это уравнение на систему частиц, движущуюся под действием как внешних сил, так и сил взаимодействия. Если силы, действующие на систему извне, отсутствуют, а есть лишь внутренняя потенциальная энергия, выражающаяся функцией W, то работа внутренних сил системы стремится израсходовать эту энергию, так что

$$\sum (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = -\delta W,$$

и это остается справедливым независимо от того, содержится ли время в алгебраических уравнениях связей или нет.

Следовательно, если T представляет полную кинетическую энергию, а все силы суть внутренние, то можно написать для вариации от свободной траектории к близкому пути, при связях без трения и при неизменном времени,

$$\delta \int (T - W)\,dt = \left| \sum m\frac{dx}{dt}\delta x + \sum m\frac{dy}{dt}\delta y + \sum m\frac{dz}{dt}\delta z \right|_1^2.$$

Строго говоря, этот результат получен для системы отдельных частиц, взаимодействующих между собою. Однако естественно обобщить его на любую материальную систему, состоящую из элементов массы, подверженных силам взаимодействия, включая, таким образом, динамику упругой системы. Окончательный анализ сводит этот элемент массы к молекулам или атомам в состоянии внутреннего движения, и это окончательное обобщение включило бы динамическую теорию теплоты.

Теперь мы можем выразить все координаты x, y, z частиц или элементов массы через достаточное число независимых величин θ, φ, ψ, ..., которые определяют положение и конфигурацию системы. Число этих переменных есть число степеней свободы системы. Уравнения,

выражающие координаты x, y, z через эти величины, могут содержать явно время t, ибо уравнение возможных работ содержит перемещения, возможные в *данное время*; таким образом, новая форма выражения $T - W$ может содержать t. В таком случае можно утверждать, что если t не изменяется, а следовательно, постоянны предельные значения времени t_1 и t_2, то

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - W)\, dt = 0,$$

если вариация, при отсутствии трения, взята между закрепленными начальным и конечным положениями динамической системы.

Эта величина $T - W$ есть лагранжева функция L, которая сама по себе одна определяет динамический характер системы; функция $-L$, или $W - T$, есть, таким образом, потенциальная энергия, видоизмененная для кинетических приложений, и соответственно этому Гельмгольц назвал ее кинетическим потенциалом системы. В полученной формуле содержится и частный случай системы, находящейся в покое, ибо в этом случае выражение

$$\delta \int W\, dt \quad \text{или} \quad \int \delta W\, dt \quad \text{равно} \quad \delta W \int dt,$$

так как W остается постоянным с течением времени, а потому из уравнения действия вытекает для этого случая, что

$$\delta W = 0;$$

это уравнение содержит в себе законы статики в той форме, что равновесие определяется условием постоянства потенциальной энергии. Для устойчивости равновесия она должна быть наименьшей.

Далее, так как L выражено в функции обобщенных координат θ, φ, ... и их скоростей, то

$$\delta \int L\, dt = \int \Big(\frac{\partial L}{\partial t} \delta\theta + \frac{\delta L}{\delta \dot\theta} \delta\dot\theta + \ldots \Big)\, dt,$$

где $\dot\theta$ представляет $\frac{d\theta}{dt}$, а $\delta\dot\theta$ равно $\frac{d}{dt}\delta\theta$. Интегрируя по частям, как и раньше, имеем

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt = \Big| \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} \delta\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \delta\varphi + \ldots \Big|_1^2 - \int \Big\{ \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \Big) \delta\theta + (\ldots) \delta\varphi + \ldots \Big\}\, dt.$$

Так как левая сторона исчезает, если конечные положения неизменны для всех значений текущих вариаций $\delta\theta$, $\delta\varphi$, ..., а все эти вариации независимы и произвольны, ибо координатные величины θ, φ, ... как раз достаточны для определения системы, — то коэффициент при каждой из этих вариаций в подынтегральном выражении в отдельности должен исчезать. Таким путем мы получим систему уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

а это и есть лагранжевы уравнения движения общей динамической системы (ур. 20, гл. IX, § 12 *выше*). Если, кроме того, существуют внешние силы, действующие на систему, то к правой стороне нужно прибавить соответствующую составляющую силу F_θ, которая определяется как та часть, которой работа $F_\theta \delta\theta$ рассчитана на изменение одной координаты θ. Эти приложенные силы могут изменяться вместе с t по любому закону; их можно включить в функцию W, прибавив к ней члены $-T_\theta\theta - \ldots$, и наличность этих членов не даст энергии системы оставаться постоянной.

Если ограничиться в этом сравнении траекторий вариацией от свободной траектории к *близким свободным траекториям*, то получим

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\delta\varphi + \ldots,$$

теперь уже как *точное* уравнение, допускающее поэтому дальнейшее дифференцирование; это уравнение представляет основу гамильтоновой теории варьирования действия.

Теперь удобно будет освободиться от ограничения, что время не варьируется. Чтобы ввести в рассмотрение это изменение, мы должны подставить в уравнение вместо $\delta\theta$ выражение $\delta\theta - \dot{\theta}\delta t$, которое выделяет из полной вариации переменной θ ту ее часть, которая происходит от движения в промежуток вариации времени δt. Кроме того, нужно в правой стороне уравнения прибавить $L\,\delta t$ с целью включить в время перемещения новый промежуток времени, добавленный в конце, вследствие варьирования. Отсюда

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\delta\theta - \dot{\theta}\delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}(\delta\varphi - \dot{\varphi}\delta t) + \ldots$$

Кроме того, $L = T - W$, а так как T — однородная функция второй степени, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\dot\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi + \ldots = 2T,$$

откуда

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\delta\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\delta\varphi + \ldots - E\,\delta t,$$

где E есть конечное значение полной энергии $T + W$.

Если предположить, что не действуют никакие внешние силы, то полная энергия E постоянна во всякое время; в этом случае

$$-E\,\delta t = t\,\delta E - \delta(Et) = t\,\delta E - \delta \int E\,dt.$$

Отсюда, перенеся последний член в левую сторону, получим это уравнение в другой форме:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\delta\theta + \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\delta\varphi + \ldots + t\,\delta E,$$

для вариаций, при которых энергия неизменна.

Это обобщение предшествовавшей формулы $\delta \int mv\,ds = 0$ для частицы, причем теперь время тоже включено и определяется как $\dfrac{\partial A}{\partial E}$, где A — интеграл по времени от $2T$, выраженный в функции начальной и конечной конфигурации и сохраняемой энергии.

В этом содержится следующий аналитический результат: если Θ, Φ, ... представляют количества движения*, соответствующие координатам θ, φ, ..., то должна существовать некоторая функция A (такого, впрочем, вида, что ее обыкновенно трудно вычислить) от переменных θ, φ, ..., E, удовлетворяющая тому условию, что при варьировании от свободной траектории к близким свободным траекториям системы

$$\delta A = \Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \ldots + t\,\delta E.$$

*Индексное обозначение главы IX было бы здесь неудобно.

В более явной и раскрытой форме, особенно для оптических приложений, в этой формуле содержится утверждение, что существует такая функция $A\Big|_1^2$ от начальной и конечной конфигураций системы и от энергии, что

$$\delta A\Big|_1^2 = \Theta_2\,\delta\theta_2 + \Phi_2\,\delta\varphi_2 + \ldots - \Theta_1\,\delta\theta_1 - \Phi_1\,\delta\varphi_1 - \ldots + (t_2 - t_1)\,\delta E.$$

Кроме того, существует такая функция $P\Big|_1^2$ начальных и конечных координат и времени, равная по значению интегралу $\int\limits_{t_1}^{t_2} (T - W)\,dt$, что

$$\delta P\Big|_1^2 = \Theta_2\,\delta\theta_2 + \Phi_2\,\delta\varphi_2 + \ldots - \Theta_1\,\delta\theta_1 - \Phi_1\,dl\varphi_1 - \ldots - E_2\,\delta t_2 + E_1\,\delta t_1$$

при варьировании от любой свободной траектории к близким свободным траекториям: но так как теперь нет уже ограничения, что энергия E должна оставаться постоянной вдоль траектории, то силы могут быть частью и внешними, работа которых будет сообщать новую энергию системе.

Самый факт существования функции P или A приводит обратно к ряду дифференциальных соотношений, непосредственно связывающих начальную и конечную конфигурации системы или группы систем, соотношений вида

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi_2} = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_1},$$

которые часто служат выражением важных физических результатов. Кроме того, в выражении δP, а следовательно, и в вытекающих из него соотношениях, конечные значения координат могут быть отличны от начальных.

Влияние возмущающих агентов на динамическую систему, невозмущенная траектория которой известна, сводится, благодаря этим принципам, к определению последовательными приближениями (из дифференциального уравнения, которому оно удовлетворяет) малого изменения, производимого ими в одной из функций P или A, характеризующей систему, — метод, совершенный по идее, но на практике допускающий и дальнейшие упрощения.

Эта изящная теория варьирования действия от любой свободной траектории к близким траекториям была полностью разработана *Гамильтоном* в одном мемуаре, состоящем из двух частей (Phil. Trans.,

1834 и 1835), и вскоре подверглась дальнейшему расширению в аналитическом направлении в работах *Якоби* и других исследователей. Она приводит систему конечных положений динамической системы в непосредственную связь с соответствующими начальными положениями, независимо от какого бы то ни было знания частных свойств путей перемещения. В связи с простейшим случаем траекторий *Томсон* и *Тэт* охарактеризовали ее как теорию прицела, связывающую, так сказать, отклонения от конечной цели, происходящие вследствие изменения прицела в той точке, откуда стреляют, с соответствующими величинами невозмущенного движения. В геометрической оптике, которая дала первоначальный стимул к этой теории и в которой лучи можно рассматривать как траектории воображаемых ньютоновых световых корпускул, она дает общие отношения изображения к предмету, которые должны оставаться в силе для инструментов любого типа, как это впервые было открыто *Гюйгенсом* и *Котесом*. Область применения этой теории распространяется теперь на всю физику.

В некоторых случаях число переменных, требующихся для рассмотрения динамической задачи, может быть уменьшено. Так, если кинетический потенциал содержит одну или более координат только в виде их скоростей, то соответствующие уравнения движения просто выражают постоянство с течением времени количества движения, отвечающего каждой такой координате; так, например, обстоит дело в случае свободно вращающихся маховых колес, связанных с каким-нибудь механизмом, и во всех других случаях, в которых меняющееся значение координаты не влияет на конфигурацию. Во всех таких случаях скорость можно исключить, заменив ее количеством движения, которое является физической постоянной движения. Кинетический потенциал можно преобразовать таким образом (*Раус, Кельвин, Гельмгольц*), чтобы он содержал одной или более чем одной переменной менее, но так, чтобы он все же сохранил свойство постоянства своего интеграла по времени. Теперь он уже не является однородной квадратичной функцией, но заключает в себе члены, содержащие другие скорости и в первой степени, помноженные, конечно, на эти постоянные количества движения, так как все члены должны иметь одинаковое измерение. Каждый такой кинетический потенциал принадлежит системе, обладающей одним или более *скрытыми* неизменными (стационарными) движениями; а отсюда возникает общая теория этого важного физического класса систем и превращения их энергий.

В самом деле, если

$$L' = L - \Psi\dot{\psi} - \ldots,$$

где $\psi, \ldots$ — группа координат, а $\Psi, \ldots$ — соответствующие количества движения, то

$$\delta L' = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \Psi\right)\delta\dot{\psi} - \left(\dot{\psi} - \frac{\partial L}{\partial \Psi}\right)d\Psi + \frac{\partial L}{\partial \psi}\,\delta\psi + \ldots + \delta_1 L,$$

где первый член тождественно исчезает, а $\delta_1 L$ есть вариация функции L относительно остальных переменных. Отсюда, если L не содержит координат $\psi, \ldots,$ так что $\Psi, \ldots$ постоянны и не подвергаются варьированию, а скорости $\dot{\psi}, \ldots$ исключены из L' посредством введения $\Psi, \ldots,$ то

$$\delta \int L'\,dt = \Big|\Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \ldots - E\,\delta t\Big|_1^2,$$

выражению, зависящему только от вариаций содержащихся явно предельных значений координат, при условии, что величины $\Psi, \ldots$ сохраняются неизменными, или маховые колеса системы не подвергаются воздействию.

Хотя эти так называемые циклические координаты вовсе не входят в L, но мы можем избежать их появления в области вариации действия только посредством преобразования функции L, как здесь показано, в L'.

Конечной целью теоретической физики является сведение законов изменений в физическом мире к динамическим принципам. Нет необходимости настаивать на фундаментальном значении, которое приобретает поэтому кинетический потенциал и закон постоянства его интеграла по времени. Две динамические системы, которых кинетические потенциалы имеют одинаковую алгебраическую форму, совершенно аналогичны по своим явлениям, как бы они в действительности ни были различны. Если некоторый класс физических явлений может быть подведен под такую постоянную вариационную форму, то его динамическая природа уже предуказана: остается лишь задача выразить координаты, скорости и количества движения и сделать известными их отношения сравнением с аналогичными системами, которые более доступны наблюдению, а потому и более известны.

Примечание к главе IX, § 9

Выше было указано, что закон сохранения энергии, как это уже давно отметил *Лагранж*, может доставить только одно из уравнений, требующихся для определения движения динамической системы. Отсюда вытекает, что рассуждение этого отдела (§ 9), которое как будто выводит все эти уравнения, должно быть недостаточным. Доказательство начинается там с предположения, что система движется по какому-нибудь произвольному пути, т. е. предполагается, что движения определяются различными возможными типами связей без трения, согласных с составом и структурой системы. Затем уравнение (9) правильно выводится из уравнений (7) и (8), так как вариации δq совершенно произвольны. Но наложенные связи вводят новые и неизвестные силы реакции связей, которые должны быть включены в число *приложенных* сил F_r, и эти силы сделали бы результат, как он там доказан, неверным.

Тем не менее, уравнения (9) справедливы, хотя этот их вывод и недостаточен. Как объяснено выше, лагранжевы уравнения (20) можно вывести непосредственно из принципа наименьшего действия, установленного независимо, как это здесь проделано, а в таком случае уравнения (9) можно вывести, ведя рассуждение в обратном порядке.

Ход рассуждений § 12 приводит к замечательному результату. Он заключается в том, что если

$$F = T_p + T\dot{q} - 2T_{p\dot{q}},$$

то единственное соотношение

$$\delta F = 0$$

содержит в себе все уравнения, связывающие координаты, скорости и количества движения системы. Это останется справедливым и в том случае, если эти три группы переменных, все еще рассматриваемые как независимые, будут заменены новыми переменными при помощи каких угодно формул преобразования, так что эта тройная классификация по типам утратится. Далее, бывают случаи, в которых установившееся движение системы, или мгновенное состояние варьированной системы, могут быть вполне исследованы экспериментальным путем, который приводит к определению, скажем, $3n$ физических величин, из

которых только $2n$ могут быть независимы, но это наше знание не указывает, как из них вывести систему n координат, n соответствующих скоростей и n количеств движения. Мы пришли к тому результату, что в каждом таком случае должна существовать такая функция F, что уравнение $\delta F = 0$ доставляет систему $3n$ уравнений, в которых содержится все требующееся нам знание. Пример этого могут представить свойства (изученные по *Максвеллу*) сети взаимодействующих электрических проводов, по которым течет ток.

Аналогично этому можно дать другой вид уравнению вариации действия

$$\delta \int (T_p - 2T_{p\dot{q}} + W)\, dt = 0,$$

где $T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2} \sum \dot{q}p$; это уравнение содержит n координат q, n их скоростей $\dot{q}$ и n их количеств движения p, ибо оно эквивалентно уравнению

$$\int \sum \Big\{ \Big(\frac{\partial T_p}{\partial p} - \dot{q} \Big) \delta p - p\, \delta \dot{q} + \frac{\partial T_p}{\partial q} \delta q + \frac{\partial W}{\partial q} \delta q \Big\}\, dt = 0,$$

откуда, по обыкновению, посредством интегрирования по частям, получаются две системы соотношений видов

$$\frac{\partial T_p}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial T_p}{\partial q} - \frac{\partial W}{\partial q},$$

если рассматривать в нем количества движения и координаты как независимые переменные. Так как согласно уравнению (18) $\frac{\partial T_p}{\partial q} = -\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q}$, то вторая система представляет лагранжевы динамические уравнения (20).

Итак, мы здесь имеем одну функцию

$$\varphi = T_p - 2T_{p\dot{q}} + W,$$

содержащую координаты и их скорости, линейную относительно последних, и такое же число количеств движения p, причем координаты и количества движения являются независимыми переменными, так что соотношение

$$\delta \int \varphi\, dt = 0$$

приводит как к установлению соотношений между количествами движения и координатами, так и к динамическим уравнениям движения системы.

Этот результат, по существу, тот же самый, что уравнение $12a$ у *Гамильтона, Phil. Trans.*, 1835, p. 247. В мемуаре *Гельмгольца* о наименьшем действии, *Crelle's Journal*, Bd. 100 (1886), Gesammelte Werke, Bd. III, S. 218, введена другая функция, по-видимому, менее удобная, в которой скорости рассматриваются как независимые от координат, но количества движения представляют частные производные от функции L по скоростям. Сравн. также Proc. Lond. Math. Soc., 1884.

Главный источник большой силы этих динамических условий минимальности или стационарности при исследовании физических агентов заключается в том, что результаты остаются верными, как бы ни был замаскирован физический характер введенных функций преобразованием к новым переменным, заданным через более употребительные динамические переменные какими угодно уравнениями. Так, эта функция φ может быть выражена через $2n$ величин, которые могут быть любым образом смешанными функциями координат и количеств движения и их производных по времени, оставаясь линейной функцией последних и подчиняясь другому ограничению, — а уравнение $\delta \int \varphi \, dt = 0$ будет все же существовать и будет выражать все динамические свойства физической системы.

Существование вариационного соотношения этого вида может быть взято за окончательный критерий того, что частично исследованная физическая система подчиняется общим законам динамики; перед важностью этого соотношения координатным величинам, через которые как раз выражаются конфигурация и движение системы, остается вспомогательное значение.

Предметный указатель

Джеймс Клерк Максвелл

Материя и движение

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 26.11.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,34. Уч. изд. л. 10,46.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.
Тираж 1000 экз. Заказ №16

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru
